第 16 届“希望杯”全国数学邀请赛

初二 第 2 试

一、选择题

1．若 a,b 均为正整数，$m=ab(a+b)$，则

A、m 一定是奇数　B、m 一定是偶数　C、只有当 a,b 一个为偶数时，m 是偶数

D、只有当 a,b 一个为偶数，另一个为奇数时，m 是偶数

2．设 $b<a<0$，$a^2+b^2=\frac{5}{2}ab$，则 $\frac{a+b}{a-b}$ 等于

A、$1/3$　B、$-1/3$　C、-3　D、3

3．Given a,b,c are positive integers, and a,b are prime numbers, $a^3b^c+a=2005$,then the value of $a+b+c$ is

A、14　B、13　C、12　D、11

（英汉词典 positive integer：正整数　Prime number：质数）

4．购买铅笔 7 支，作业本 3 个，圆珠笔 1 支共需 3 元；购买铅笔 10 支，作业本 4 个，圆珠笔 1 支共需 4 元，则购买铅笔 11 支，作业本 5 个，圆珠笔 2 支共需

A、4.5 元　B、5 元　C、6 元　D、6.5 元

5．计算机将信息转换成二进制数来处理．二进制是“逢二进一”，如二进制数 $(1101)_2$ 转换成十进制数是 $1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=13$，那么二进制数 $(111\cdots111)_2$（括号内共 2005 个 1）转换成十进制数是

A、$2^{2004}+1$　B、2^{2005}　C、$2^{2005}-1$　D、$2^{2005}+1$

6．已知△ABC 的三个内角的比是 $m:(m+1):(m+2)$，其中 m 是大于 1 的正整数，那么△ABC 是

A、锐角三角形　B、直角三角形　C、钝角三角形　D、等腰三角形

7．已知△ABC 的三条高的比是 3∶4∶5，且三条边的长均为整数，则△ABC 的边长可能是

A、10　B、12　C、14　D、16

8．已知两位数 $\overline{ab}$ 能够被 3 整除，它的十位数字与个位数字的乘积等于它的个位数字，且它的任意次幂的个位数字等于它的个位数字．这样的两位数共有

A、1 个　B、3 个　C、4 个　D、5 个

9．放成一排的 2005 个盒子中共有 4010 个小球，其中最左端的盒子中放了 a 个小球，最右端的盒子中放了 b 个小球，如果任何相邻的 12 个盒子中的小球共有 24 个，则

A、$a=b=2$　B、$a=b=1$　C、$a=1,b=2$　D、$a=2,b=1$

10．整数 x,y,z 满足 $x\le y<z$，且 $\begin{cases}|x+y|+|y+z|+|z+x|=4\\|x-y|+|y-z|+|z-x|=2\end{cases}$ 则 $x^2+y^2+z^2=$

A、2　B、14　C、2 或 14　D、14 或 17

二、填空题

11．如果 $|a|=3,|b|=5$，那么 $|a+b|-|a-b|$ 的绝对值等于_____.

12．已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$, 则 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=$_____.

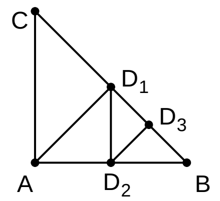

图 1

13．某汽车从 A 地驶向 B 地，若每分钟行驶 a 千米，则 11 点到达，若每分钟行驶 $\frac{2}{3}a$ 千米，则 11∶20 时距离 B 地还有 10 千米；如果改变出发时间，若每分钟行驶 $\frac{3}{4}a$ 千米，则 11 点到达，若每分钟行驶 a 千米，

则 11∶20 时已经超过 B 地 30 千米．A、B 两地的路程是_____千米．

14．若 $M=\overline{abc321}$ 是一个六位数，其中 a,b,c 是三个互异的数字，且都不等于 0，1，2，3，又 M 是 7 的倍数，那么 M 的最小值是_____．

15．分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2=$____．

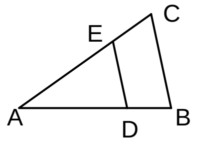

图 2

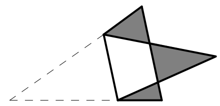
图 3

16．若在凸 n（n 为大于 3 的自然数）边形的内角中，最多有 M 个锐角，最少有 m 个锐角，则 M =_____；m =_____．

17．如图 1，等腰 Rt△ABC 的直角边长为 32，从直角顶点 A 作斜边 BC 的垂线交 BC 于 D_1，再从 D_1 作 $D_1D_2\perp AC$ 交 AC 于 D_2，再从 D_2 作 $D_2D_3\perp BC$ 交 BC 于 D_3，⋯，则 $AD_1+D_2D_3+D_4D_5+D_6D_7+D_8D_9=$_____；$D_1D_2+D_3D_4+D_5D_6+D_7D_8+D_9D_{10}=$_____．

18．如图 2，将三角形纸片 ABC 沿 EF 折叠可得图 3（其中 EF∥BC），已知图 3 的面积与原三角形的面积之比为 3∶4，且阴影部分的面积为 8 平方厘米，则原三角形面积为________平方厘米．

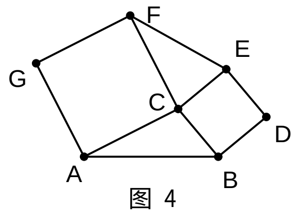

图 4

19．如图 4，△ABC 中，BC∶AC=3∶5，四边形 BDEC 和 ACFG 均为正方形，已知△ABC 与正方形 BDEC 的面积比是 3∶5，则△CEF 与整个图形的面积比等于_____．

20．如果正整数 n 有以下性质：n 的八分之一是平方数，n 的九分之一是立方数，它的二十五分之一是五次方数，那么 n 就称为“希望数”，则最小的希望数是_____．

三、解答题：(要求：写出推算过程)

21．图 5 是一个长为 400 米的环形跑道，其中 A、B 为跑道对称轴上的两点，且 A、B 之间有一条 50 米的直线通道，甲、乙两人同时从 A 点处出发，甲按逆时针方向以速度 v_1 沿跑道跑步，当跑到 B 点处时继续沿跑道前进，乙按顺时针方向以速度 v_2 沿跑道跑步，当跑到 B 点处时沿直线通道跑回到 A 点处．假设两人跑步时间足够长．求：

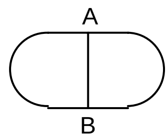

图 5

（1）如果 $v_1:v_2=3:2$，那么甲跑了多少路程后，两人首次在 A 点处相遇？

（2）如果 $v_1:v_2=5:6$，那么乙跑了多少路程后，两人首次在 B 点处相遇？

22．（1）如果 a 是小于 20 的质数，且 $\frac{1}{a}$ 可化为一个循环小数，那么 a 的取值有哪几个？

（2）如果 a 是小于 20 的合数，且 $\frac{1}{a}$ 可化为一个循环小数，那么 a 的取值有哪几个？

23．正三角形 ABC 的边长为 a，D 是 BC 的中点，P 是 AC 边上的动点，连结 PB 和 PD 得到△PBD．求：

（1）当点 P 运动到 AC 的中点时，△PBD 的周长；

（2）△PBD 的周长的最小值．