

## 第四届“希望杯”全国数学邀请赛（高一）第一试

### 一、选择题

- 1、如果函数  $y = f(x)$  有反函数，函数  $y = f(x)$  的图象过点  $(-a, b)$ ，则----- ( )  
(A)  $y = f^{-1}(x)$  的图象过点  $(a, -b)$ ， $x = f^{-1}(y)$  的图象过点  $(-b, a)$ 。  
(B)  $y = f^{-1}(x)$  的图象过点  $(-b, a)$ ， $x = f^{-1}(y)$  的图象过点  $(a, -b)$ 。  
(C)  $y = f^{-1}(x)$  的图象过点  $(b, -a)$ ， $x = f^{-1}(y)$  的图象过点  $(-a, b)$ 。  
(D)  $y = f^{-1}(x)$  的图象过点  $(-b, -a)$ ， $x = f^{-1}(y)$  的图象过点  $(-a, -b)$ 。
- 2、函数  $y = f(x)$  的定义域和值域都是  $R^-$ ，那么函数  $y = -f(-x)$  的图象---- ( )  
(A) 在第一象限 (B) 在第二象限 (C) 在第三象限 (D) 在第四象限
- 3、正方体的对角线长度是  $\sqrt{3}$ ，则正方体的表面积是----- ( )  
(A)  $3\sqrt{3}$  (B) 6 (C)  $6\sqrt{3}$  (D) 12
- 4、三棱锥 A-BCD 中，AB  $\perp$  CD，AC  $\perp$  BD，则 C 在面 ABD 内的射影是  $\triangle ABD$  的  
(A) 重心 (B) 垂心 (C) 外心 (D) 内心----- ( )
- 5、奇函数  $y = f(x)$  有反函数  $y = f^{-1}(x)$ ，函数  $y = f^{-1}(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是减函数，则  $y = -f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上----- ( )  
(A) 是增函数 (B) 是减函数 (C) 有时是增函数，有时是减函数  
(D) 有时是增函数，有时是减函数，有时是常函数
- 6、函数  $y = f(x-a)$  与函数  $y = f(a-x)$  的图象间的关系是----- ( )  
(A) 关于 y 轴对称 (B) 关于 x 轴对称  
(C) 关于直线  $x = 2a$  对称 (D) 关于直线  $x = a$  对称
- 7、对于任何  $k \in Z$ ，都有  $\sin(\alpha + k\pi) = \cos(\alpha + \pi + k\pi)$ ，则  $\alpha$  的值是----- ( )  
(A)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (B)  $k\pi + \frac{3\pi}{4}$  (C)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (D)  $k\pi - \frac{3\pi}{4}$  (以上  $k \in Z$ )
- 8、不等式  $\tan x > 0$  的解集是  $P_1$ ，不等式  $\sin x \cdot \cos x > 0$  的解集是  $P_2$ ，不等式  $\sec x \cdot \csc x > 0$  的解集是  $P_3$ ，则有----- ( )  
(A)  $P_1 = P_2 = P_3$  (B)  $P_1 \subset P_2 = P_3$  (C)  $P_1 = P_2 \subset P_3$  (D)  $P_3 \subset P_2 = P_1$
- 9、用棱长为  $a$  的正方体，削成一个体积最大的正四面体，这个正四面体的表面积是  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$  (C)  $\sqrt{3}a^2$  (D)  $2\sqrt{3}a^2$ ----- ( )
- 10、正  $n$  ( $n \in N, n \geq 3$ ) 棱台上、下底面、侧面的面积依次是  $S_1, S_2$  ( $S_2 > S_1 > 0$ )， $S_{侧}$ ，若  $2(S_2 - S_1) = S_{侧}$ ，则棱台侧面与底面所成二面角的大小是----- ( )  
(A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $75^\circ$
- 11、三棱锥 P-ABC 中， $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$ ，M 为底面 ABC 内的任意一点， $\angle APM = \alpha$ ， $\angle BPM = \beta$ ， $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $\cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，则  $\angle CPM$  的值是----- ( )

(A)  $30^\circ$       (B)  $45^\circ$       (C)  $60^\circ$       (D)  $75^\circ$

12、如果对任何  $x \in (1, +\infty)$  , 都有  $x^\alpha > x^\beta$  , 则有理数  $\alpha$ 、 $\beta$  间的关系是----- ( )

(A)  $\alpha > 0$  ,  $\beta < 0$  (B)  $\alpha < 0$  ,  $\beta > 0$  (C)  $\alpha > \beta$  (D)  $|\alpha| > |\beta|$

13、定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $y = f(x)$  有反函数 , 则函数  $y = f(x+a)+b$  的图象与  $y = f^{-1}(x+a)+b$  的图象间的关系是----- ( )

(A) 关于直线  $y = x+a+b$  对称 (B) 关于直线  $x = y+a+b$  对称  
(C) 关于直线  $y = x+a-b$  对称 (D) 关于直线  $x = y+a-b$  对称

14、函数  $y = f(x)$  有反函数  $y = f^{-1}(x)$ 。把函数  $y = f(x)$  的图象绕原点  $O$  顺时针转动  $90^\circ$  , 得到另一个函数的图象 , 这另一个函数可以是----- ( )

(A)  $y = f^{-1}(x)$  (B)  $y = -f^{-1}(x)$  (C)  $y = -f^{-1}(-x)$  (D)  $y = f^{-1}(-x)$

15、用  $a, b, c, d$  四色染正四面体四个面 , 每面一色 , 将经过适当转动后对应面染色完全相同的称为同类 , 否则就是不同类 , 所有可能的染色方式的种数是有---- ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 24

## 二、填空题

1、如果  $f(x) = a^{-2x}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) , 则  $f(\log_a 2) =$  \_\_\_\_\_。

2、如果  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  ,  $\log_{\sin \theta} \cos \theta = \log_{\cos \theta} \sin \theta$  , 则  $\theta =$  \_\_\_\_\_。

3、如果  $y = |2x - 1| - |x - 1|$  , 则  $y$  的最小值是\_\_\_\_\_。

4、若  $\sin \alpha + \cos \alpha = -1$  , 则  $\sin^{1993} \alpha + \cos^{1993} \alpha =$  \_\_\_\_\_。

5、设奇函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$  ,  $f(1) = 2$  且对任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  , 都有  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  , 当  $x > 0$  时 ,  $f(x)$  是增函数。则函数  $y = -f^2(x)$  在区间  $[-3, -2]$  上的最大值是\_\_\_\_\_。

6、如果  $\{a^2, 2\} \cap \{1, 2, 3, 2a - 4\} = \{6a - a^2 - 6\}$  , 则  $a$  的值是\_\_\_\_\_。

7、在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中 ,  $AB=5$  ,  $BC=4$  ,  $CC_1=3$  , 一只蚂蚁由  $A$  出发 , 沿长方体表面爬到  $C_1$  , 爬行的最短路线的长度是\_\_\_\_\_。

8、如果  $\{a, a^2 + 1, a + 1\} \subseteq \{x | x^2 \leq 100, x \in \mathbb{Z}\}$  , 则  $a$  的可取值的集合是\_\_\_\_\_。

9、函数  $y = x^{\frac{q}{p}}$  ( $p, q \in \mathbb{N}, p, q$  互质) , 这个函数的定义域和值域都是  $\mathbb{R}^{-1}$  , 则质数 (也叫素数)  $p$  的值是\_\_\_\_\_。

10、设  $P$  为空间一点 ,  $PA, PB, PC, PD$  是四条射线。若  $PA, PB, PC, PD$  两两成角相等 , 则这些角的余弦值是\_\_\_\_\_。

11、三个半径都是 1 的球彼此相切地靠紧放在水平的桌面上。有一个小球与桌面相切 , 又同时与三个小球相切。这个小球的半径是\_\_\_\_\_。

12、在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中 ,  $AB_1$  与  $BC_1$  之间的距离是 1 , 这个正方体的对角线的长度是\_\_\_\_\_。

13、方程  $|\log_2(2x+2)| = x^0$  的实根是\_\_\_\_\_。

14、 $f(x) = (1 + \frac{x}{2})^2 - 2$  ,  $x \in [-2, +\infty)$  , 则方程  $f(x) = f^{-1}(x)$  的解集是\_\_\_\_\_。

15、将两个相同的正四棱锥的底面重合，构成一个八面体。在它的面中，互相平行的面有\_\_\_\_\_对。（两个互相平行的面称为“一对”）