

第五届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第一试

一、选择题

- 1、若 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 的定义域为 A , $f[f(x)]$ 的定义域为 B , 则----- ()
(A) $A \cup B = \mathbf{R}$ (B) $A \supset B$ (C) $A = B$ (D) $A \subseteq B$
- 2、已知 $y = y_1 - y_2$, 其中 y_1 与 x^2 成正比例, y_2 与 x 成反比例, 并且当 $x = 1$ 和 $x = 2$ 时都有 $y = 21$, 则 y 与 x 之间的关系是----- ()
(A) $y = 3x^2 - \frac{18}{x}$ (B) $y = 3x + \frac{18}{x^2}$ (C) $y = 3x^2 + \frac{x}{18}$ (D) $y = 3x^2 + \frac{18}{x}$
- 3、若函数 $y = \log_3(x^2 + ax - a)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是----- ()
(A) \mathbf{R} (B) \mathbf{R}^+ (C) $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-4, 0)$
- 4、已知函数 $f(x) = |x + a|$, 当 $x \geq 3$ 时为增函数, 则----- ()
(A) $a = 3$ (B) $a < -3$ (C) $a = -3$ (D) $a \geq -3$
- 5、函数 $f(x) = |\log_2 |x||$ 的图象与直线 $y = \pi$ 的交点的个数是----- ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 6、定义域是全体实数的函数 $f(x)$, 对于常数 a 都有 $f(x) = f(a - x)$, 那么这个函数的图象的对称轴是直线----- ()
(A) $x = a$ (B) $x = \frac{a}{2}$ (C) $x = 2a$ (D) $x = -\frac{a}{2}$
- 7、关于 x 的一元函数 $y = kx + 1 - k (k \neq 0)$ 的图象与坐标轴围成的三角形的面积是 2, 则 k 值的集合是----- ()
(A) $\{-1, 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\}$ (B) $\{-1, 0\}$ (C) $\{3 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}\}$ (D) \emptyset
- 8、幂函数 $y = x^\alpha$, 对于给定的有理数 α , 其定义域与值域相同, 则此幂函数----- ()
(A) 一定是奇函数 (B) 一定是偶函数
(C) 一定不是奇函数 (D) 一定不是偶函数

9、 $f(x) = 3x - 2$ ，则 $f^{-1}[f(0)]$ 的值是----- ()

- (A) $\frac{8}{9}$ (B) -8 (C) 0 (D) $-\frac{1}{8}$

10、长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各棱所在直线中，与直线 AC_1 成异面直线的直线的条数是----- ()

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

二、A 组填空题

11、函数 $y = \log_{(x+1)}(27 - 9^x)$ 的定义域为_____。

12、已知 $f(x) = ax + 4, g(x) = \frac{3}{x}$ ，且 $f(3) = g(3)$ ，则不等式 $f(x) > g(x)$ 的解为_____。

13、设 $f(x) = ax^3 - b\sin x + 2$ ，且 $f(3) = 1$ ，则 $f(-3) =$ _____。

14、若函数 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{b^2}$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 2)$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为_____。

15、O 为空间一点，射线 OA、OB、OC 交于 O， $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ ， $\angle COA = 90^\circ$ ，则二面角 A-OB-C 的平面角的余弦函数值是_____。

16、函数 $f(x)$ 是定义域为 $[-1, 1]$ 的奇函数，且为增函数， $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

17、奇函数 $f(x)$ ，当 $x \leq 0$ 时，它的解析式为 $f(x) = x(1-x)$ ，则当 $x > 0$ 时， $f(x) =$ _____。

18、定义域是实数域的奇函数 $f(x)$ ，对任意实数 x 都有 $f(x) = f(x+2)$ ，则 $f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(1992) + f(1994) =$ _____。

19、若 $\log_a(2-a^2) < 1$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

20、若函数 $f(x)$ 满足条件： $f(\lg a) = 10000, f^{-1}(x) = \log_a x$ ，则 $a =$ _____。

三、B 组填空题

21、集合 B 满足关系 $\{3,4\} \subset B \subseteq \{0,1,2,3,4\}$ ，则 B 的个数为_____。

- 22、方程 $\lg(x-1) + \frac{1}{2}\lg(x-6)^2 = \lg 6$ 的根的集合为_____。
- 23、函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sin x - \cos x$ 的最小值为_____。
- 24、已知方程 $x^2 - 2mx + (m+2) = 0$ 有两个实数根，则这两个根的平方和的最小值为_____。
- 25、方程 $mx^2 - (m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两个实根分别在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 内，则 m 的取值范围是_____。
- 26、集合 $M = \{(x, y) \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, x, y > 0\}$ ，且 $(a, b) \in M$ ，则乘积 ab 的取值范围是_____。
- 27、函数 $f(x)$ 与 $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，则函数 $h(x) = f(6x - x^2)$ 的单调递增区间是_____。
- 28、方程 $x^2 - 2x + p = 0$ 的解集为 A ，方程 $x^3 + qx^2 + rx = 0 (r \neq 0)$ 的解为 B ， $A \cup B = \{0, -1, 3\}$ ， $A \cap B = \{3\}$ ，则 $r =$ _____。
- 29、 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ ，则 $f(2 - \sqrt{3}) =$ _____。
- 30、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ，则对角线 A_1C_1 与 BD_1 所在的直线的距离是_____。