

第六届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第一试

一、选择题

1、已知集合 $A = \{x \mid x \neq -1, x \in R\}$, $B = \{x \mid x \neq 2, x \in R\}$, 则 $A \cup B$ 写成区间形式为----- ()

- (A) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (B) $(-1, 2)$
(C) $(-\infty, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

2、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各面的对角线中与 AD_1 成 60° 的条数是----- ()

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

3、若 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f[f(x)]$ 的值----- ()

- (A) 等于 1 (B) 等于 0
(C) 可能为 1 , 也可能为 0 (D) 可能是 0 , 1 以外的数

4、设 $M = \{x \mid x^2 + px - 3 = 0\}$, $N = \{x \mid x^3 - qx^2 + rx = 0\}$, $S = \{p, q, r\}$, 且 $M \cap N = \{-3\}$, $M \cup N = \{-2, -3, 0, 1\}$, 则 S 为----- ()

- (A) $\{-2, 5, -6\}$ (B) $\{2, 5, 6\}$ (C) $\{5, -2, 6\}$ (D) $\{2, -5, 6\}$

5、将锐角 A 为 60° , 边长为 a 的菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成二面角 θ , 已知 $\theta \in [60^\circ, 120^\circ]$, 则 AC 、 BD 之间的距离 d 的最值为----- ()

- (A) $d_{\max} = \frac{3a}{2}$, $d_{\min} = \frac{a}{4}$ (B) $d_{\max} = \frac{3a}{4}$, $d_{\min} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$
(C) $d_{\max} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$, $d_{\min} = \frac{a}{4}$ (D) $d_{\max} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $d_{\min} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$

6、将 $5^{\log_{25}(\lg 2 - 1)^2}$ 化简后, 结果是----- ()

- (A) $\lg \frac{1}{5}$ (B) $\lg 5$ (C) $\lg^2 \frac{1}{5}$ (D) $\lg^2 5$

7、已知 $\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值----- ()

- (A) 不确定, 可在 $[0, 1]$ 内取值 (B) 不确定, 可在 $[-1, 1]$ 内取值
(C) 确定, 等于 1 (D) 确定, 等于 1 或 -1

8、已知方程 $2^x + x = 0$ 的实根为 a , $\log_2 x = 2 - x$ 的实根为 b , $\log_{\frac{1}{2}} x = x$ 的实根为 c , 则 a, b, c 的大小关系是----- ()

(A) $b > c > a$ (B) $c > b > a$ (C) $a > b > c$ (D) $b > a > c$

9、 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，它的最小正周期为 2，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(1994)+f(1995)$ 等于_____ ()

(A) 1 或 0 (B) 1 或 -1 (C) 0 (D) 1

10、已知直二面角 $\alpha-l-\beta$ ，直线 $a \subset$ 平面 α ，直线 $b \subset$ 平面 β ，且 a 与 l 不垂直， b 与 l 不垂直，那么_____ ()

(A) a 与 b 可能垂直，但不可能平行 (B) a 与 b 可能垂直，也可能平行
(C) a 与 b 不可能垂直，但可能平行 (D) a 与 b 不可能垂直，但不可能平

二、A 组填空题

11、若 $\log_a x = 2$ ， $\log_b x = 3$ ， $\log_c x = 4$ ，则 $\log_{abc} x =$ _____。

12、函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的最大值为_____。

13、设在长方体中，一对角线与过其一个端点的两条棱的交角各是 60° 和 45° ，则此对角线与过其同一个端点的第三条棱的交角为_____。

14、设函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，且在 $(-2,2)$ 内， $f(x)$ 又是单调递减的奇函数，则

$f(5)$ 、 $f(-2.43)$ 、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 、 $f(-4)$ 从小到大的顺序为_____。

15、正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 A_1C 与底面 $ABCD$ 成 30° 角，则截面 A_1BCD_1 与底面 $ABCD$ 所成角的正切等于_____。

16、函数 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-4}}{ax^2+4ax+3}$ 的定义域为 \mathbb{R} ，则实数 a 的取值范围是_____。

17、已知二面角 $\alpha-BC-\beta$ 的大小为 60° ， $A \in \alpha$ ， $D \in \beta$ ，且 $AB \perp BC$ ， $CD \perp BC$ ， $AB = BC = CD = 1$ ，则 AD 的长度为_____。

18、函数 $y = 2 - 3\sqrt{4x - x^2} - 3$ ($1 \leq x \leq 2$) 的反函数为 $y = f(x)$ ，则 $f(2) =$ _____。

19、方程 $\log_{\frac{1}{5}}(5x - x^2 - 6) = 0.5$ 的解集为_____。

20、正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 是 AB 的中点， F 是 BC 边上的一动点，将 ADE 及 DCF 分别沿 DE 、 DF 折起，使 A 、 C 重合于 A' ，则 A' 点到平面 DEF 的距离的最大值为_____。

三、B 组填空题

21、若幂函数 $y = x^{m^2-4m-5}$ ($m \in \mathbb{Z}$) 的图象与 x 轴， y 轴无交点，且图象关于原点对称，则 m 的取值范围为_____。

22、已知函数 $f(x) = ||x-2|-a|-3$ 的图象与 x 轴恰有三个交点，则这三个交点的坐标为_____。

- 23、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ，则 B_1C 与平面 A_1DC_1 的距离为_____。
- 24、设 $x \in \mathbf{Z}$ ，且满足 $(x+1)^{200} < 2^{300}$ ，则 x 的最小值为_____。
- 25、函数 $y = \frac{1}{2\sin x - 1}$ 的值域是_____。
- 26、设 $f(x) = -x^2 + 2^{a+1}x - 4^a + 1$ ，且当 $x \in [0, 3]$ 时， $f(x) < 0$ ，则 a 的取值范围是_____。
- 27、设函数 $f(x) = (x-1)^2 + 2 (x \leq 0)$ ，函数 $g(x)$ 适合 $f[g(x)] = x$ ，则 $g(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
- 28、 \mathbf{R} 上定义的函数 $f(x)$ ，任何实数 x 都有： $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$ ， $f(1) = \lg 3 - \lg 2$ ， $f(2) = \lg 3 + \lg 5$ ，则 $f(2001) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
- 29、已知四面体 $ABCD$ 中， P, Q, R 分别是棱 BC, CD, AD 上的点，且 $BP=2PC, CQ=2QD, DR=RA$ ，则 A, B 两点到过 P, Q, R 的平面的距离之比是_____。
- 30、正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面的边长及高都是 2cm ，过 AB 作一个截面，截面与底面 ABC 成 60° 角，则截面的面积为_____。