

第七届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第一试

一、选择题

- 1、集合 $\{0,1,2\}$ 的子集个数为----- ()
(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 8
- 2、函数 $f(x) = a \sin x + b$ 的最大值是----- ()
(A) $|a+b|$ (B) $|a|+b$ (C) $a+b$ (D) $a+|b|$
- 3、函数 $y = 2 \sin 2(1-x)$ 的最小正周期是----- ()
(A) 2π (B) π (C) 4π (D) 3π
- 4、在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BC 与 B_1D 间的距离是----- ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5、以下命题中, 正确的是----- ()
(A) 两个平面斜交, 则其中一个平面内的任意一条直线与另一个平面都不垂直。
(B) 过平面 α 的一条斜线的平面与 α 一定不垂直。
(C) a, b 是异面直线, 过 a 必能作一个平面与 b 垂直。
(D) 同垂直于一个平面的两个平面平行。
- 6、在一个正方体中取四个顶点作为一个四面体的顶点, 在这样的一个四面体中, 直角三角形最多有 ----- ()
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
- 7、若关于 x 的方程 $(x+1)^2 = 2a+1$ 和 $(x+2)^2 = 2ax$ 中至少有一个方程具有两个不等实根, 则实数 a 的集合为----- ()
(A) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (B) $(-1, 0) \cup (4, +\infty)$ (C) $(0, 4)$ (D) \mathbb{R}
- 8、若 $x \in (2, 4)$, $a = 2^{x^2}$, $b = (2^x)^2$, $c = 2^{2^x}$, 则 a, b, c 的大小关系是----- ()
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > a > b$ (D) $b > a > c$
- 9、方程 $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 的整数解的个数是----- ()
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 10、有三个命题:
函数 $y = f(g(x))$, 其中 $u = g(x)$ 在区间 D 上是增函数, $y = f(u)$ 在区间 D 上是减函数, 则函数 $y = f(g(x))$ 在区间 D 上是减函数。
函数 $y = f(x)$ 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 若 $y = f(x)$ 是区间 D 上是增函数, 则 $y = f^{-1}(x)$ 也是区间 D 上是增函数。
函数 $y = f(x)$ 在定义域 A 上存在反函数, 则 $f(x)$ 在 A 上是单调函数。
以上三个命题中, 正确的个数为----- ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、A 组填空题

- 11、三棱柱的对角线条数为_____。
- 12、方程 $\lg x = \log_{0.1} x$ 的解集为_____。
- 13、已知集合 $M = \{x | x \geq 1\}$, $N = \{x | 0 \leq x < 5\}$, 全集 $I = R$, 则 $\overline{M} \cup \overline{N} =$ _____。
- 14、若 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$, 且 $\sin \theta < 0$, 则 θ 所在的象限是第_____象限。
- 15、函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 的图象的一条对称轴的方程是 $x = \frac{\pi}{8}$, 且 $\varphi \in (0, \pi)$, 则 $\varphi =$ _____。
- 16、在正四面体 ABCD 中 , ABC 和 ACD 的中心分别为 M 和 N , 且 $MN=1$, 这个四面体的高为_____。
- 17、已知 $f(x)$ 是奇函数 , $g(x)$ 是偶函数 , 且 $f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 3$, 则 $f(x) + g(x) =$ _____。
- 18、关于 x 的方程 $x^2 - (2m - 8)x + m^2 - 16 = 0$ 的两个实根中 , 一个比 $\frac{3}{2}$ 大 , 另一个比 $\frac{3}{2}$ 小 , 则 m 的取值范围是_____。
- 19、函数 $f(x) = x^2 \lg a - x + 1$ 的图象与 x 轴有两个交点 , 则 a 的取值范围是_____。
- 20、三条直线 a, b, c 两两成异面直线 , 它们互相成等角 , 且存在一个平面与它们都平行 , 则 a, b 所成的角为_____。
- 三、B 组填空题
- 21、在正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中 , E 为 AA₁ 的中点 , 则二面角 B₁-DE-A₁ 的平面角的余弦是_____。
- 22、函数 $f(x)$ 的值域为 $(\frac{1}{4}, 4]$, 则 $g(x) = f(x) - 2\sqrt{f(x)}$ 的值域为_____。
- 23、在空间四边形 ABCD 中 , AB BC , BC CD , CD AB , $AB=BC=CD$, 则 AD 与 BC 所成的角的正切值是_____。
- 24、集合 $M = \{x | x = a^{x^2 - (a+1)x + a}, a > 1\}$, M 中的元素个数是_____。
- 25、在棱长为 3 的正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中 , E 为棱 AA₁ 上一点 , 且 A₁E=1 , F 为截面 A₁BD 内一动点 , 则 AF+FE 的最小值等于_____。