

第八届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第一试

一、选择题

- $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 下列结论中正确的是----- ()
(A) $f(x) - f(-x) > 0$ (B) $f(x) - f(-x) < 0$
(C) $f(x) \cdot f(-x) \leq 0$ (D) $f(x) \cdot f(-x) > 0$
- 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AC_1 与 A_1B 所成角相等于----- ()
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°
- $\sqrt{1 - \sin^2 2} - \sqrt{1 - \cos^2 2}$ 等于----- ()
(A) $\cos 2 - \sin 2$ (B) $-\cos 2 - \sin 2$ (C) $-\cos 2 + \sin 2$ (D) $\cos 2 + \sin 2$
- 等腰直角三角形 ABC 中, $AB=BC=1$, M 为 AC 中点, 沿 BM 把它折为二面角, 折后 A 与 C 的距离为 1, 则二面角 $C-BM-A$ 的大小为----- ()
(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 120°
- 以下函数中, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是增函数的函数是----- ()
(A) $y = -\log_{0.5}(-x)$ (B) $y = -(x+1)^2$ (C) $y = 1+x^2$ (D) $y = \frac{x}{1-x}$
- 已知 $M = \{\alpha \mid \alpha = \frac{4k\pi}{3}, k \in Z\}$, $N = \{\alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in Z\}$, $P = \{\alpha \mid \alpha = 2k\pi, k \in Z\}$, 则集合 M 、 N 、 P 满足关系式----- ()
(A) $M = (N \cup P)$ (B) $M \subset (N \cup P)$
(C) $M \supset (N \cup P)$ (D) $M \cap (N \cup P) = \Phi$
- 一个二面角的两个面分别垂直于另一个二面角的两个面, 那么这两个二面角的大小关系是-----
()
(A) 相等 (B) 互补 (C) 相等或互补 (D) 不能确定的
- 对于任意实数 t , 函数 $f(x) = x^2 + mx + n$ 都有 $f(t+2) = f(2-t)$, 则有- ()
(A) $f(2) < f(1) < f(4)$ (B) $f(1) < f(2) < f(4)$
(C) $f(2) < f(4) < f(1)$ (D) $f(4) < f(2) < f(1)$
- 若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是周期函数, 最小正周期都是 T , 对于函数 $y = f_1(x) + f_2(x)$, 以下判断中, 正确的是----- ()
(A) 最小正周期是 T (B) 有最小正周期 t , 且 $t < T$
(C) 是周期函数, 但可能没有最小正周期 (D) 可能是非周期函数
- 5 个顶点不共面的五边形叫做空间五边形, 空间五边形的 5 条边所在直线中, 互相垂直的直线对至多有----- ()
(A) 5 对 (B) 6 对 (C) 7 对 (D) 8 对

二、A 组填空题

- 若函数 $f(x) = 2 - x - x^2$, 则 $f(-1) + f(1) =$ _____。

- 12、函数 $y = -2x^2 (x \leq -1)$ 的反函数为_____。
- 13、矩形 ABCD 中， $AB=4$ ， $BC=3$ ，PA 平面 ABCD， $PA=1$ ，则 P 点到 BD 的距离等于_____。
- 14、函数 $f(x) = \frac{2x+1}{4x+3}$ ，则 $f^{-1}(2)$ 的值是_____。
- 15、函数 $y = x - \sqrt{1-x}$ 的值域为_____。
- 16、若 $\log_a 2 > 2$ ，则 a 的取值范围是_____。
- 17、关于 x 的方程 $a^x = \log_a x$ 有且仅有一个在 $(0,1)$ 内的实根，那么 a 的取值范围是_____。
- 18、正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中，二面角 A-BD₁-B₁ 的大小为_____。
- 19、三棱锥 S-ABC 的底面是正三角形，A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是 SBC 的垂心，且二面角 H-AB-C 的大小为 30° ，则 SA:AB=_____。
- 20、长方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中， $AB=6$ ， $BC=3$ ，在线段 BD、A₁C₁ 上各有一动点 P、Q，在 PQ 上有一点 M，且 $PM=2MQ$ ，则 M 点轨迹图形的面积为_____。
- 三、B 组填空题
- 21、过正三棱锥的一条侧棱及底面中心作一个截面，若截面是等腰三角形，侧面与底面所成角为 θ ，则 $\cos \theta =$ _____。
- 22、若 $\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1$ ，则 $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ 的值等于_____。
- 23、若 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + x$ 对一切 $x \in R$ ，都有 $f(x) \geq x$ ，且 $f(1) = 1$ ，则 p 、 q 的值分别为_____。
- 24、方程 $(\lg x)^{\lg x} = x$ 的解为_____。
- 25、函数 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ ， $x \in [n, n+1]$ (n 是整数) 的值域中恰有 10 个不同整数，则 n 的值为_____。