

第十届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第一试

一、选择题

- 1、已知 $f(x-1) = x+1$ ，则 $f(2x+1)$ 等于----- ()
(A) $2x$ (B) $2x+1$ (C) $2x+2$ (D) $2x+3$
- 2、若 $x \in \{x \mid \log_2 x = 2^{-x}\}$ ，则有----- ()
(A) $x^2 > x > 1$ (B) $x^2 > 1 > x$ (C) $1 > x^2 > x$ (D) $x > 1 > x^2$
- 3、已知 $f(x) = 2^x - 2^{-x} - 2$ ， $f(a) = 0$ ，则 $f(-a)$ 等于----- ()
(A) $-a-4$ (B) 2 (C) 4 (D) $-2a$
- 4、线段 OA、OB、OC 不共面， $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ ， $OA=1$ ， $OB=2$ ， $OC=3$ ，
则 $\triangle ABC$ 是----- ()
(A) 等边三角形 (B) 不等边的等腰三角形
(C) 直角三角形 (D) 钝角三角形
- 5、已知函数 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x \geq \frac{3}{2} \\ \lg(3-x), & x < \frac{3}{2} \end{cases}$ ，若方程 $f(x) = k$ 无实数解，则 k 的取值
范围是----- ()
(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(-\infty, 1)$ (C) $(-\infty, \lg \frac{3}{2})$ (D) $(\lg \frac{3}{2}, +\infty)$
- 6、若 $0 < 2\alpha < 90^\circ < \beta < 180^\circ$ ， $a = (\sin \alpha)^{\cos \beta}$ ， $b = (\cos \alpha)^{\sin \beta}$ ， $c = (\cos \alpha)^{\cos \beta}$ ，
则 a, b, c 的大小顺序是----- ()
(A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $b > a > c$ (D) $c > a > b$
- 7、函数 $f(x) = \log_x(2+x-x^2)$ 的定义域是----- ()
(A) $-1 < x < 2$ (B) $0 < x < 2$
(C) $0 < x < 1$ 或 $1 < x < 2$ (D) $x > 0$ 且 $x \neq 1$
- 8、函数 $f(x) = x^\alpha$ ， $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ，若不等式 $f(x) > |x|$ 成立，则在

$\alpha \in \{-2, -1, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2\}$ 的条件下, α 可以取的值的个数是----- ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9、在矩形 ABCD 中, $AB=a$, $AD=2b$, $a < b$, E、F 分别是 AD、BC 的中点, 以 EF 为折痕把四边形 EFCD 折起, 当 $\angle CEB=90^\circ$ 时, 二面角 C-EF-B 的平面角的余弦值等于----- ()

- (A) 0 (B) $\frac{a^2}{b^2}$ (C) $-\frac{a^2}{b^2}$ (D) $-\frac{a}{b}$

10、 a, b, l 是两两异面的直线, a 与 b 所成的角是 $\frac{\pi}{3}$, l 与 a 、 l 与 b 所成的角都是 α , 则 α 的取值范围是----- ()

- (A) $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ (B) $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ (C) $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ (D) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

二、填空题

11、函数 $y = f(x-a)$ 与函数 $y = f(-x+a)$ 的图象关于_____对称。

12、将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 再将所得图象上各点的横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$, 这时所得图象的函数解析式是_____。

13、与正方体各面成相等的角且过正方体三个顶点的截面的个数是_____。

14、空间四边形 ABCD 中, $AB=AD=3$, $BC=CD=2$, $AC=\sqrt{5}$, 则 AC 与平面 BCD 所成的角等于_____。

15、长、宽、高分别为 3cm、4cm、12cm 的长方体木块 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中, $AB=3\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$, $CC_1=12\text{cm}$, 若一只小虫要由 A 点沿木块表面爬到 C₁ 点, 最短路径的长度是_____。

16、已知 $x, y > 10$, $xy = 1000$, 则 $\lg x \cdot \lg y$ 的取值范围是_____。

17、对于函数 $f(x) = \log_a x$ (其中 $a > 0, a \neq 1$), 若 $f(3) - f(2) = 1$, 则

$f(3.75) + f(0.9)$ 的值等于_____。

18、棱长为 1 的正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中, E、F 分别是 A₁B₁、B₁C₁ 的中点, 则 B₁ 点到平面 EFCA 的距离等于_____。

19、 $\alpha-l-\beta$ 是 60° 的二面角，二面角内一点 P 到 α, β 的距离分别是 1, 2，则 P 到棱 l 的距离等于_____。

20、定义在 \mathbb{R} 上的函数 $y = f(x)$ 、 $y = f(-x)$ 、 $y = -f(x)$ 、 $y = -f(-x)$ 的图象重合，它们的值域是_____。

21、有两块直角三角板，一块三角板的两条直角边的长分别是 1, $\sqrt{3}$ ；另一块三角板的两条直角边的长分别是 $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ 。这两块三角板有两对顶点重合，且成 90° 的二面角，则不重合的两个顶点的距离等于_____。

22、已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\sin 2\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ ，则 α 等于_____。

23、已知集合 $\{0, -1, 2a\} = \{a - 1, -|a|, a + 1\}$ ，则实数 a 的值等于_____。

24、 $[t]$ 表示：不大于 t 的最大整数，则方程 $[2x + 1] = 4x$ 的根是_____。

25、已知直线 l 垂直于平面 α ，直线 m 在平面 β 内，那么下面四个命题：

$$(1) \alpha \perp \beta \Rightarrow l \perp m \quad (2) \alpha \perp \beta \Rightarrow l \parallel \beta$$

$$(3) l \parallel m \Rightarrow \alpha \perp \beta \quad (4) l \perp m \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

其中正确命题的序号是_____。