

## 第十一届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试

一、选择题（每小题6分，共60分）

1、以下四个判断中，正确的是（ ）。

(A) 若  $x > a > 0$ ，则  $\log_a x > 1$ ； (B) 若  $x > a > 0$ ，则  $\log_a x > 1$  或  $\log_a x < 1$ ；

(C) 若  $\log_a x > 1$ ，则  $x > a > 0$ ； (D) 若  $\log_a x > 1$ ，则  $0 < x < a < 1$ 。

2、已知  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ,  $d = \log_2 \frac{1}{3}$ ，则  $a, b, c, d$  由小到大排列的顺序是（ ）。

(A)  $a < b < c < d$  (B)  $b < a < d < c$  (C)  $d < a < b < c$  (D)  $d < b < a < c$

3、函数  $f(x) = |\log_2 |2x - 1||$  的单调递增区间是（ ）。

(A)  $(1/2, +\infty)$  (B)  $(0, 1), (1, +\infty)$

(C)  $(0, 1/2), (1/2, +\infty)$  (D)  $(0, 1/2), (1, +\infty)$

4、下面给出的每一组数分别表示三条线段的长，将每组数表示的三条线段首尾相连，其中恰能构成三角形的是（ ）。

(A)  $\log_3 5, \sin 2, \cos 1$  (B)  $\text{tg}(17^\circ/12), \sin 1, 1$

(C)  $\sin 1, \cos 1, 1$  (D)  $\sin 2, \text{tg} 1, 3$

5、设定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x), g(x)$  都有反函数，并且函数  $f(x-1), g^{-1}(x-2)$  的图象关于直线  $y = x$  对称，若  $g(5) = 1999$ ，那么  $f(6) =$ （ ）。

(A) 1999 (B) 2000 (C) 2001 (D) 2002

6、将长为 2 dm，宽为 dm 的长方形纸片围成一个容器（不考虑底面，也不考虑粘接处），立放于桌面上，下面四种方案中，容积最大的是（ ）。

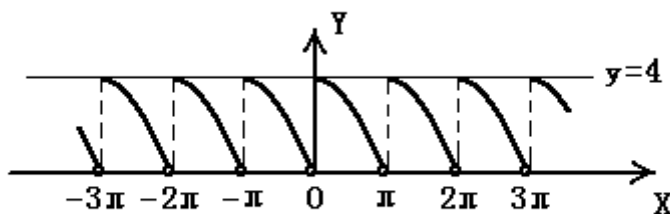
(A) 直三棱柱 (B) 直四棱柱 (C) 高为 dm 的圆柱 (D) 高为 2 dm 的圆柱

7、周期函数  $f(x)$  的图象大致如下，当  $0 \leq x < \pi$  时， $f(x) = 4 \cos \frac{\pi}{2}$ ，则在  $(-\quad, +\quad)$  上  $f(x)$  的解析式是 ( )。

(A)  $4 \cos \frac{\pi}{2}$

(B)  $4 \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi), k\pi \leq \pi < (k+1)\pi$

(C)  $4 \cos \frac{\pi - k\pi}{2}, k\pi \leq \pi < (k+1)\pi$  (D)  $4 \cos \frac{\pi + k\pi}{2}, k\pi \leq \pi < (k+1)\pi$



题一7图

8、The root(根) of the equation  $\frac{3}{5}x + \log_3 x = 3$  is in the interval(区间) of ( )。

- (A) (3, 4) (B) (4, 5) (C) (5, 6) (D) (6, 7)。

9、函数  $f(x) = (x-1999)(x+2000)$  的图象与 x 轴、y 轴有三个交点，有一个圆恰好通过这三个点，则此圆与坐标轴的另一个交点是 ( )。

- (A)  $(0, \sqrt{1999/1988})$  (B) (0, 1) (C)  $(0, \sqrt{2000/1999})$  (D) (0, 1/2)。

10、无盖的圆柱形容器的底面半径为 1，母线长为 3，现在将盛满水的该容器平稳地慢慢倾斜，当水剩到原来的 2/3 时，圆柱的母线与水平面所成的角 ( )。

- (A) 等于 60° (B) 等于 45° (C) 等于 30° (D) 在 45° 和 60° 之间。

二、A 组填空题 (每题 6 分，共 60 分)

11、We want to cut one orange into eight equal pieces, at least \_\_\_\_\_ times we have to cut it.

12、已知集合 M 满足  $\{2, 5\} \subseteq M \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则不同的 M 的个数是\_\_\_\_\_。

13、一根细金属丝下端挂着一个半径为 1 的金属球，将它沉入半径为 R 的圆柱形容器内的水中，现将金属丝向上提升，当金属球被提出水面时，容器内的水面下降了\_\_\_\_\_。

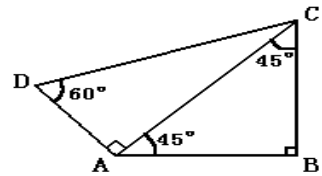
14、已知函数  $f(x) = x^2 + px + q, p, q, x \in R$  , 又集合  $A = \{x | f(x) = x\}$  ,

$B = \{x | f[f(x)] = x\}$  , 若  $A = \{1, 3\}$  , 则  $B =$  \_\_\_\_\_。

15、函数  $f(x)$  的图象是将函数  $\log_2(x+1)$  的图象上各点的横坐标变为原来的  $1/3$  , 纵坐标变为原来的  $1/2$  而得到的 , 则与  $f(x)$  的图象关于原点对称的图象表示的函数的解析式是 \_\_\_\_\_。

16、若函数  $f(x) = \lg(ax^2 + 5x + 4)$  的值域是  $R$  , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

17、Fold the quadrilateral ABCD (see the figure) by the diagonal (对角线) AC, and make the plane (平面) ADB perpendicular to (垂直) the plane ABC. Then the sine (正弦) of the angle between line CD and plane ABD is \_\_\_\_\_。



二 17 题图

18、简谐振动  $x_1 = A \sin(\omega t + \pi/3)$  和

$x_2 = B \sin(\omega t - \pi/6)$  叠加后得到的合振动是  $x =$  \_\_\_\_\_。

19、设  $f(x) = a \sin x + b \sqrt[1999]{x} + 2000$  , 若  $f(\log_{20} \log_{201} 101) = 2001$  , 则

$f(\log_{20} \log_{101} 201) =$  \_\_\_\_\_。

20、某水准仪是封闭的正四面体 , 体内装有水 , 当正四面体的一个面放置于水平地面时 , 体内水面高度为体高的  $1/2$  , 现将它倒置 , 此时水的高度是体高的 \_\_\_\_\_。

三、B 组填空题 ( 每题 6 分 , 共 30 分 )

21、函数  $y = \begin{cases} x^2 & (x \leq 0) \\ 2^{-x} - 1 & (x > 0) \end{cases}$  的反函数是 \_\_\_\_\_。

22、函数  $y = (a \cos x + b \sin x) \cos x$  有最大值 2 , 最小值 - 1 , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_ ,  $b =$  \_\_\_\_\_。

23、一艘轮船原定在 10 小时后从 A 点到距 A 点 80 哩 , 在 A 正东方向的 B 点 , 现测得有南偏西  $30^\circ$  , 时速为  $4(\sqrt{3} - 1)$  哩的潮流 , 该轮船仍要在原定时间内到达 B 点 , 那么船速应提高到 \_\_\_\_\_ 哩 / 小时 , 并将航向定为 \_\_\_\_\_。

24、正三棱锥的侧棱长与底面边长之比为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ，则侧面与底面所成二面角的平面角的余弦值是  $\frac{1}{3}$  ，其中  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  的取值范围是  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}]$  。

25、已知  $\sin \alpha \cos \beta = 1/3, 0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$  ，则  $\sin \alpha \sin \beta$  的取值范围是  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  ，

$\cos \alpha \cos \beta$  的取值范围是  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  。