

第十二届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试

一、选择题：

1. 函数 $y = -3x - 2$ 的图像不经过----- ()

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限

2. 函数 $y = f(a + x)$ 与函数 $y = f(a - x)$ 的图像关于----- ()

(A)直线 $x = a$ 对称 (B)点 $(a, 0)$ 对称 (C)原点对称 (D) y 轴对称

3. 已知 a, b, c 是实数, 条件 $p: abc = 0$; 条件 $q: a = 0$, 则 p 是 q 的----- ()

(A)必要不充分条件 (B)充分不必要条件 (C)充分必要条件 (D)不充分也不必要条件

4. 使函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 为偶函数的充分条件可以是：

$a \neq 0$ 且 $b = 0$ $a = 0$ 且 $b = 0$ $a \neq 0$ 且 $c = 0$ $a = b = c = 0$

以上判断中不对的是：(A) (B) (C) (D) ----- ()

5. 方程 $4^x - 2^{x+2} + |2^x - 1| + 3 = 0$ 的根的个数是：(A)4 (B)3 (C)2 (D)1 ----- ()

6. A, B 两车分别在甲、乙两地同时相向出发, 各自匀速前进, 在途中离甲地 50 公里处第一次相遇, 当它们分别到达乙、甲两地之后, 立即以原速返回, 在途中离乙地 30 公里处又一次相遇, 则甲、乙两地----- ()

(A)相距 80 公里 (B)相距 100 公里 (C)相距 120 公里 (D)的距离不能确定

7. 方程 $x^2 + (p + 2)x - 1 = 0$ 有一个根为 x_0 , 且 $x_0 - \frac{1}{x_0} = 3$, 则 p 值为----- ()

(A)5 (B)4 (C)1 (D)-5

8. 函数 $y = x^3 - 5x^2 - x + 5$ 的图像与 x 轴----- ()

(A)没有交点 (B)有 1 个交点 (C)有 2 个交点 (D)有 3 个交点

9. 20 位裁判给一位跳水运动员打分, 每人给的分都是整数, 去掉一个最高分, 再去掉一个最低分, 该运动员的平均得分: 若取一位小数为 9.4 (用四舍五入取近似值), 如果取两位小数, 那么最小值应是: (A)9.37 (B)9.38 (C)9.39 (D)9.40 ----- ()

10. 给出以下四个不等式：

$|x| \geq x, x \in R$ $|x - 1| + |x - 2| > \log_2 |\sin x|, x \neq n\pi, n \in Z$

$x > \log_2 x, x > 0$ $3^{x+2} > 3, x \in R$

其中不成立的是：(A) (B) (C) (D) ----- ()

二、A 组填空题

11. 方程 $x^2 - 2x = 3(|x - 1| - 1)$ 的根是_____.

12. 已知函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = \varphi(x)$, 且

$$\varphi(x) = \log_{\sec^2 \theta} \left(\frac{3}{x} - \sin^2 \theta \right), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 则方程 } f(x) = 3 \text{ 的解是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. 若对于任意实数 x , 不等式 $|x - 2| + |x + 1| \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 不等式 $\log_x (3x - 1) > 1$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. Let f be a function such that $f(x + y^2) = f(x) + 2(f(y))^2$ for any real numbers x and y , and $f(1) \neq 0$, then $f(2001)$ is equal to $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知 $f(x) = 2e^{x+2}$, $g(x) = 2x + 5$, 点 $(f(x), p(x))$ 在函数 $y = f(x)$ 的图象上, 则 $p(\ln 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 已知函数 $f(x) = \ln[3^x - 3^{(a^2 - 2a - 2)x}]$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 平面点集 $M = \{(x, y) | x^2 - 2x + 2 \leq y \leq 6x - x^2 - 3 \text{ 且 } x, y \in \mathbb{Z}\}$ 中元素的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

19. 设定义域为 R 的函数 $f(x): f(\operatorname{tg} x) = 2 \cos^2 x - 1$, 则 $f(x)$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

20. Let $\frac{1}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n - 2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) be the general term of a sequence, then the sum of its first 2001 terms is equal to $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、B 组填空题

21. 已知集合 $A = \{x | x - a = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

22. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ $x \in (-1, 0]$, 则 $f^{-1}(x)$ 的解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

23. 我国在使用公元纪年的同时, 也一直沿用我国古代创立的干支纪年法, 如甲午战争中的甲午, 辛亥革命中的辛亥就是年份的名称, 干支中的干是天干的简称, 是指: 甲乙丙丁戊己庚辛壬癸; 支是地支的简称, 是指: 子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥。在纪年时, 同时分别从甲、子开始, 不改变各自的顺序, 循环往复下去。已知公元 2001 年是辛巳年, 那么下一个辛巳年是公元 $\underline{\hspace{2cm}}$ 年, 距公元 2001 年最近的甲子年是公元 $\underline{\hspace{2cm}}$ 年。

24 已知 $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, $g(x) = \frac{2x + a}{bx - 1}$, 且 $f[g(x)] = \frac{1}{2x}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

25. 方程 $\log_2 x = x^2 - 3x - 2$ 的整数根是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 还有一个根是小于 1 的正数, 他的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.