

第十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试

一. 选择题

1. 已知 $M = \{x | x^2 > 4\}$, $N = \{x | x < 3\}$, 则下列等式中正确的是----- ()

(A) $\overline{M} \cup \overline{N} = \{x | x \geq -2\}$ (B) $\overline{M} \cap \overline{N} = R$ (C) $M \cap N = \{x | x < 3\}$ (D) $M \cup N = R$

2. 设 $g(x) = 1 - x$, 且当 $x \neq 1$ 时, $f[g(x)] = \frac{x}{1-x}$, 则 $f(\frac{1}{2})$ 等于----- ()

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 0

3. 设 $f_1(x) = f(x+5)$, $f_2(x) = f(x) - 3$, $f_3(x) = f(-x)$, $f_4(x) = -f(-x)$, 则下列表述中正确的是----- ()

(A) $f_1(x)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象往右平移 5 个单位得到

(B) $f_2(x)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象往上平移 3 个单位得到

(C) $f_3(x)$ 是偶函数

(D) $f_4(x)$ 的图象是将 $f(x)$ 的图象绕原点旋转 180° 得到

4. 已知 $f(x) = x^2 - 2001x$, 若 $f(m) = f(n)$, $m \neq n$, 则 $f(m+n)$ 等于----- ()

(A) 2001 (B) -2001 (C) 0 (D) 1000.5

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$, 则 a_{2001} 等于----- ()

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 2

6. 命题 P : 有些三角形是直角三角形, 则命题 \overline{P} 为----- ()

(A) 有些三角形不是直角三角形

(B) 有些三角形是锐角或钝角三角形

(C) 所有三角形都不是直角三角形

(D) 不是三角形就不是直角三角形

7. Let f be a function such that $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ for any real numbers x and y . If

$f(1) = \frac{1}{16}$, then the value of $f(-1)$ is----- ()

(A) 16 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $-\frac{1}{16}$ (D) -16

8. 设 $f(x) = \cos(\sin x)$, $g(x) = \sin(\cos x)$, 则 ()

(A) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数 (B) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数

(C) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为偶函数 (D) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为奇函数

9. 已知集合 $A = \{x | \log_3(x^2 - 2x - 15) > 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax - 3a^2 \leq 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

(A) $(-\frac{4}{3}, 0)$ (B) $(-\infty, -4) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$ (C) $(-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\frac{4}{3}, 0) \cup (2, +\infty)$

10. 在以下关于向量的命题中, 不正确的是 ()

(A) 若向量 $\vec{a} = (x, y)$, 向量 $\vec{b} = (-y, x)$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$

(B) 四边形 $ABCD$ 是菱形的充要条件是 $\vec{AB} = \vec{DC}$ 且 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$

(C) 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

(D) $\triangle ABC$ 中, \vec{AB} 和 \vec{CA} 的夹角等于 $180^\circ - A$

二、A 组填空题

11. 公式 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ 成立的条件是_____.

12. 若 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{2}$, 且 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, 则 2α 在第_____象限.

13. 函数 $y = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ \frac{1}{x+1}, & x < -1 \end{cases}$ 的反函数是_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$, 且 $a_9 = \frac{1}{7}$, 则 $a_{2002} =$ _____.

15. 不等式 $12^x + 5^x \leq 13^x$ 的解集为_____.

16. 已知函数 $f(x) = 2ax^2 + 4(a-3)x + 5$ 是在区间 $(-\infty, 3)$ 上的减函数, 则 a 的取值范围是_____.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $CH \perp AB$ 于 H , $AH = 2HB$, 则与 $\angle B$ 的两边相切且圆心在 CH 上的圆的半径等于_____.

18. 使不等式 $\frac{5x+1}{x-1} > 2x+2$ 成立的 x 的正整数值是_____.

19. Let a and b the two real roots of the quadratic equation $x^2 - (k-1)x + (k^2 + 3k + 4) = 0$, where k is some real number. The largest possible value of

$a^2 + b^2$ is _____.

20. 用 $S(n)$ 表示自然数 n 的数字和, 例如 $S(10) = 1 + 0 = 1, S(909) = 9 + 0 + 9 = 18$, 若对任何 $n \in N$, 都有 $n + S(n) \neq x$, 满足这个条件的最大的两位数 x 的值是_____.

三、B 组填空题

21. 若等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则首项 a_1 及公比 q 应满足的条件是_____.

22. 函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a}{3}$, 则 $a =$ _____.

23. 已知函数 $y = f(x) = -2x^2 + 8x + 1, x \in R$, 对于 $t \in R$, 在区间 $[t, t + 2]$ 上, 将函数 $f(x)$ 的最大值表示为 t 的函数 $g(t)$, 则 $g(t) =$ _____.

24. 设函数 $y = 3 - 0.6x$ 与函数 $y = 0.6x$ 的图象交于点 $P_1(x_1, y_1)$, 对任意 $n \in N$ 且 $n > 1$, 将过点 $(0, 3)$ 和点 $(x_{n-1}, 0)$ 的直线与直线 $y = 0.6x$ 的交点的坐标记为 $P_n(x_n, y_n)$, 则点 P_1, P_2, P_3 的坐标依次为_____, 点 P_{2002} 的坐标为_____.

25. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0, -4)$, 且与直线 $y = x$ 的交点 A, B 关于直线 $y = -x$ 对称, 又 $|AB| = 4\sqrt{2}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.