第十四届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第 1 试

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

1．设 $P=\dfrac{1}{\log_2 11}+\dfrac{1}{\log_3 11}+\dfrac{1}{\log_4 11}+\dfrac{1}{\log_5 11}$，则

A．$0<P<1$ B．$1<P<2$ C．$2<P<3$ D．$3<P<4$

2．方程 $\log_{2x}(2-7x)=2$ 的解的个数是

A．4 B．3 C．1 D．0

3．已知四边形 ABCD 在映射 f ：$(x,y)\to(x-1,y+2)$ 作用下的象集为四边形 $A'B'C'D'$。四边形 ABCD 的面积等于 6，则四边形 $A'B'C'D'$ 的面积等于

A．9 B．$6\sqrt{2}$ C．$4\sqrt{3}$ D．6

4．已知 $x,y\in R$，则“ $xy\le 1$ ”是“ $x^2+y^2\le 1$ ”的

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

5．图 2 是函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象，由图象可以看出

A．$a>0$，$d>0$ B．$a<0$，$d<0$

C．$a<0$，$d>0$ D．$a>0$，$d<0$

6．设 $a=\log_{\frac{1}{2}}5$，$b=\log_{\frac{1}{3}}5$，$c=\log_2 5$，$d=\log_3 5$，则 a,b,c,d 的大小关系是

A．$d>c>a>b$ B．$d>c>b>a$

C．$c>d>b>a$ D．$c>d>a>b$

7．An equilateral triangle（等边三角形）and a circle have the same center. The area of the triangle not in the circle equals the area of the circle not in the triangle. If the radius of the circle is 2, then the length of a side of the triangle is

A．$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$ B．$2\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$ C．$3\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$ D．$4\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$

8．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_2=5$，且对大于 2 的正整数 n，总有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，则 a_{2003} 等于

A．-5 B．-2 C．2 D．3

9．等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1536$，公比 $q=-\dfrac{1}{2}$，用 P_n 表示数列的前 n 项之积，则 P_n 中最大的是

A．P_9 B．P_{10} C．P_{11} D．P_{12}

10．2002 年 9 月 28 日，“希望杯”组委会第二次赴俄考查团启程，途径哈巴罗夫斯克和莫斯科，两地航程约 9000 千米，往返飞行所用的时间并不相同，这是因为在北半球的高纬度地区，有股终年方向恒定的西风，人们称它为“高空西风带”，已知往返飞行的时间相差 1.5 小时，飞机在无风天气的平均时速为每小时 1000 千米，那么西风速度最接近

A．60 千米/小时 B．70 千米/小时

C．80 千米/小时 D．90 千米/小时

二、A 组填空题（每小题 5 分，共 50 分）

11．函数 $f(x)=\log_a x(a>0)$，其中 $a>0$ $a\ne 1$，则方程 $f(a^x)=3$ 的解集是_______。

12．函数 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup[2,5)$ 上的值域是______________。

13．示波器荧屏上有一正弦波，一个最高点在 $B(3,5)$，与 B 相邻的最低点为 $C(7,-1)$，则这相正弦波对应的函数是__________。

14．集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\in A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，那么 S 中无"孤立元素"的 4 元子集的个数是_______。

15．奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数，在区间 $[3,6]$ 的最大值为 8，最小值为 -1，则 $2f(-6)+f(-3)=$___________。

16．设 $2003=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两不相等的非负整数，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$____________。

17．The range of the trigonometric function（三角函数）$y=A\cos x+Bis-2\le y\le 8$。Determine the value of B is___________。

18．如图 3，将长方形 ABCD 沿 CE 线折叠，使点 B 恰好落在 AD 边上，折痕 $CE=l$，记 $\angle ECB=\theta$，用 l,θ 表示 DC=_______________。

19．设 $f_1(x)=\dfrac{2}{x+1}$，而 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$，$n\in N^*$。记 $a_n=\dfrac{f_n(2)-1}{f_n(2)+2}$，则 $a_{99}=$____________。

20．在世界杯足球赛中，参赛的 32 个队平均分成 8 组，各组先进行单循环赛：组内 4 队每两队赛一次，每组积发领先的两队，共 16 个队分 8 对进入下一阶段的淘汰赛；获胜 8 强进行四分之一决赛；获胜 4 强进行半决赛；失败 2 队比赛争季军；获胜 2 队决赛争冠军。这样，世界杯共要进行_________场比赛。

三、B 组填空题（每小题 10 分，共 50 分）

21．对映射 $f:x\to f(x)$，使 $f(x)=x$ 成立的 x 的值称为映射 f 的不动点。若由映射 f 确定在函数 $y=f(x)$ 区间 $[a,b]$ 内的不动点个数是_________，其中正值有_______个。

22．数列 $1,1,2,2,3,3,\cdots,n,n,\cdots\cdots$ 的通项公式 $a_n=$__________，前 n 项和 $S_n=$______。

23．甲、乙、丙、丁、戊五位同学，看五本不同的书 A、B、C、D、E，每人至少要读一本书，但不能重复读同一本书，甲、乙、丙、丁分别读了 2、2、3、5 本书，A、B、C、D 分别被读了 1、1、2、4 次。那么，戊读了________本书，E 被读了_______次。

24．等差数列 $\{a_n\}$ 及等比数列 $\{b_n\}$ 中，存在不相同的 3 个正整数 m、n、k，有 $a_m=b_m$，$a_n=b_n$，$a_k=b_k$，且 $a_m\ne a_n$，请写出满足题意的 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的通项公式：$a_n=$_______，$b_n=$__________，其中 m、n、k 分别是__________。

25．函数 $y=f(x)$ 定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-1,4)$，对于定义域内不等正实数 x_1,x_2 都有 $f(x_1)+f(x_2)<2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，请写出两个满足条件的（不同类型的）函数解析式，___________________，________________。