

第十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试

一、选择题（每题4分，共40分）

1. 函数 $f(x) = |\tan 2x|$ 的最小正周期是 ()

- A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

2. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \cos x$ 在 $x \in (0, 2\pi)$ 时的单调递增区间是 ()

- A. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $(0, \pi)$ C. $(\pi, 2\pi)$ D. $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

3. 对于任意实数 x ，若不等式 $|x-3| + |x-4| > a (a > 0)$ 恒成立，则实数 a 应满足 ()

- A. $0 < a < 1$ B. $0 < a \leq 1$ C. $a > 1$ D. $a \geq 1$

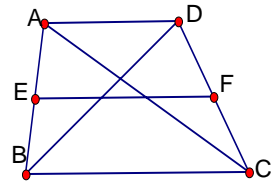
4. 等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和分别为 S_n 、 T_n ，且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n-3}{2n+3}$ ，则 $\frac{a_6}{b_6} =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{27}{23}$

5. 如图， EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，则在向量 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ 、

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ 、 $\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$ 中，与 \overrightarrow{EF} 相等的向量的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



6. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin C = 2 \cos A \sin B$ ，则该三角形一定是 ()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 钝角三角形

7. 函数 $f(x) = \frac{x + |x-4|}{\sqrt{9-x^2}}$ ()

- A. 是奇函数但不是偶函数 B. 是偶函数但不是奇函数
C. 既是奇函数又是偶函数 D. 既不是奇函数又不是偶函数

8. 集合 M 由正整数的平方组成，即 $M = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ ，若对某集合中的任意两个元素进行某种运算，运算结果仍在此集合中，则称此集合对该运算是封闭的。 M 对下列运算封闭的是 ()

- A. 加法 B. 减法 C. 乘法 D. 除法

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，“ $a_1 < a_3$ ”是“ $a_7 < a_9$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

10. 已知函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = 3^x$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称, 则 $f(x) = (\quad)$

- A. $\log_3 x - 1$ B. $2 - 3^{-x}$ C. 3^{-2+x} D. $2 - \log_3 x$

二、A 组填空题 (每题 4 分, 共 40 分)

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数,} \\ 1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 当 $x \in R$ 时,

$f(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$, $g(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知不等式 $ax + b > 0$ 的解集是 $\{x | x > 2\}$, 则不等式 $|bx + a| > 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$; 不等式 $bx + a > 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 一个等差数列共有 12 项, 前 4 项的和是 10, 后 4 项的和是 4, 则中间 4 项的和是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 10 项的和是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 某广告公司准备用 200 只彩色灯泡, 设计成一个梯形图案, 且每层比上面相邻的一层多 1 只灯泡, 那么, 最多的一层至多可安装 $\underline{\hspace{2cm}}$ 只灯泡, 最少的一层至少可安装 $\underline{\hspace{2cm}}$ 只灯泡.

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的乘积 $P_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+n-10}{2}}$, 则 $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $\{a_n\}$ 的前 5 项的和是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$, 则函数 $f(x)$ 的最大值与最小值之差是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$, 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若 $f(1) < f(|x-1|)$, 则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 已知函数 $f(x) = |x^2 + bx + c|$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值是 t , 且 $f(1) = 0, b > 0$, 将 t 表示成 b 的函数 $g(b)$, 则 $g(b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 函数 $y = \cos(\sin x)$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

20. A creeper grows to length of 4m in 20 days by doubling its length everyday. How many days does it take to grow to a length of $\frac{1}{4}$ m? Answer: $\underline{\hspace{2cm}}$. (英汉小词典: creeper: 攀缘植物)

三、B 组填空 (每小题 8 分)

21. Find the missing number in the sequence 3, 6, 13, 28, $\underline{\hspace{2cm}}$, 122, 249, $\underline{\hspace{2cm}}$.
Answer: $\underline{\hspace{2cm}}$. (英汉小词典: sequence 数列)

22. 当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 时, 函数 $y = 3 - \sin x - 2\cos^2 x$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 最大值

是_____.

23 .函数 $f(x) = \log_a(x^2 + 2x - 3)$,若 $f(2) > 0$,可知 $f(x)$ 的单调递增区间是_____; 单调递减区间是_____.

24 . 3 支代表队共 10 名棋手参加围棋比赛,不同代表队的棋手之间都进行一场比赛,同一代表队的棋手之间都不进行比赛. 那么比赛最少可能进行_____场, 最多可能进行_____场.

25 . 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t, \text{且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排成的数列, 则

$a_5 =$ _____, $a_{50} =$ _____.