

第十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试

一、选择题（每小题4分，共40分）

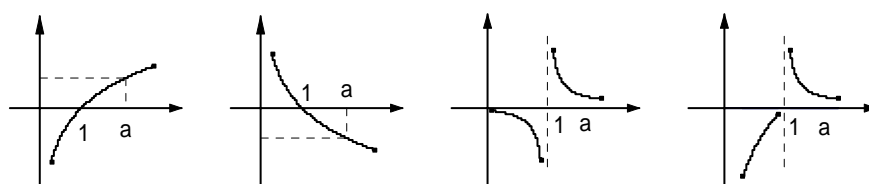
1. $\cos 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2004} \cdot \cos \frac{2\pi}{2004} \cdot \cos \frac{3\pi}{2004} \cdot \dots \cdot \cos \frac{2004\pi}{2004}$

- (A) $1/1002$ (B) $1/2004$ (C) $1/1002^2$ (D) 0

2. 设 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2005) =$

- (A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 0 (D) $\sqrt{2}/2+1$

3. 函数 $y = \log_x a$ ($a > 1$) 的图象可能是



- (A) (B) (C) (D)

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_{10} 是方程 $3x^2 + 6x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $a_4 + a_7 =$

- (A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 1

5. 数列 4, 44, 444, 4444, ... 的前 2005 项的和的末 4 位是

- (A) 7380 (B) 3620 (C) 2880 (D) 5160

6. 如果在求非负整数 m, n 的和时, 任何一位均无须进位 (十进制), 那么称 (m, n) 是“简单”的. 和为 2005 的简单非负整数有序对 (m, n) 的个数是

- (A) 2005 (B) 2004 (C) 16 (D) 18

7. ABC 中, “ $\sin 2A = \sin 2B$ ”是“ABC 是等腰三角形”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充要条件 (D) 即不充分也不必要条件

8. 一个活动性较强的细胞每隔 10 秒钟分裂为一个活动性较强的与一个活动性较弱的细胞, 一个活动性较弱的细胞每隔 20 秒分裂为两个活动性较弱的细胞, 现在有一个活动性较强的细胞, 100 秒后细胞的个数为

- (A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 橙子奥数工作室录入暗记, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, 则 $a_{2005} =$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 2005

10. Find the sum of all the positive integers which are less than or equal too 200 and not divisible by 3 and 5

- (A) 9368 (B) 9637 (C) 10732 (D) 5465

二、A 组填空题（每小题4分，共40分）

11. 函数 $f(x) = |2 \sin x + a|$ 的最小正周期为 π , 则 $a =$ _____.

12. 注意力不集中的同学常将“6”错看成“9”, 或将“9”错看成“6”. 在解一个填空题“在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 9, d = 6, n = \dots$, 则 $a_n =$ _____.”时, 某同学不仅将首项“9”错看成了“6”, 而且将公差“6”看成了 9, 除此之外, 他没有看错其他数字, 也没有出现运算错误, 如果他得到的答案是 24, 那么实际正确的答案应该是: _____.

13. 已知 $\cos 76^\circ$ 约等于 0.24, 那么 $\sin 118^\circ$ 约等于 _____.

14. 若 $\cos x - \sin x = 1$, 则 $\cos^{2005} x + \sin^{2005} x =$ _____.

15. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \cos \pi x$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = f(x-1) + 1$, 则 $f(1/3) = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 集合 $A = \{x | -8 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x | x \leq m\}$, 若 $A \cup B \neq B$ 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
17. 设 $f(x) = 3 - |x|$, $g(x) = |x| - 2$, 记 $F(x) = f[g(x)]$, 则 $x \leq -2$ 时, $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$; $0 < x \leq 2$ 时, $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (答案中不能含有绝对值符号)
18. 正方形 ABCD 的边长为 a . 有一点从 B 点出发, 经过 BC—CD—DA 运动到点 A. 若点 P 到点 B 的路程记为 x , 则 PAB 的面积 y 与 x 之间的函数关系式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
19. 一只蚂蚁向某个方向沿直线爬行一段距离后, 按逆时针方向旋转 $\pi/10$, 继续沿直线爬行一段后, 按逆时针方向转过 $\pi/5$, 如此下去. 设蚂蚁第 i 次按逆时针方向转过 $i\pi/10$, 当所爬行的距离首次与开始的方向平行时, 蚂蚁共转弯 $\underline{\hspace{2cm}}$ 次.
20. 甲、乙、丙、丁四位同学参加数学竞赛, 其中一人获奖. 有人走访了四位同学, 甲说:“我获奖”, 乙说:“甲、乙未获奖”; 丙说:“甲或乙获奖”; 丁说:“乙获奖”, 4 位同学的话恰有两句是对的, 则获奖的同学是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、B 组填空题 (每小题 8 分, 共 40 分)

21. 函数 $f(x) = x^2 - 1$ ($x \leq 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, 不等式 $f(x) > f^{-1}(x)$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
22. 在 $1, 2, 3, \dots, 2005$ 共 2005 个自然数中, 被 $3, 4, 5, 6, 7$ 除均余 2 的数字共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个, 其中最大的一个是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
23. 已知集合 橙子奥数工作室录入暗记, $A = \{x | |x^2 - 1| = \frac{x}{10} + b\}$, 当 $b = 0$ 时, A 中元素的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 当 $b = 1$ 时, A 中元素的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
24. 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 2^n$ 和 $b_n = 3n + 2$, 将它们的公共项由小到大排成数列 $\{c_n\}$, 则 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n = \underline{\hspace{2cm}}$, 它的前 n 项和 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
25. 以下是一个序列数对的序列: $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (0,2), (1,2), (2,2), (2,1), (2,0), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3), (0,3), (0,4), \dots$ 按顺序将 $1, 3, 5, 7, 2n-1$ 个有序数对分别组成第 1 组, 第 2 组, 第 3 组, 第 4 组, \dots , 第 n 组:
- 第 1 组: $\{(0,0)\}$
- 第 2 组: $\{(1,0), (1,1), (0,1)\}$
- 第 3 组: $\{(0,2), (1,2), (2,2), (2,1), (2,0)\}$
- 第 4 组: $\{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3), (0,3)\}$
- 第 5 组: $\{(0,4), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1), (4,0)\}$
-
- 那么序列中第 2005 个数对在第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 组中, 该数对是 $\underline{\hspace{2cm}}$.