

第十七届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第1试

2006年3月19日 上午8:30 — 10:00

试题收集：浙江嘉善 祖正石 录入：祖正石

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 设 $S = \{(x, y) | xy > 0\}$, $T = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$, 则A、 $S \cup T = S$ B、 $S \cup T = T$ C、 $S \cap T = S$ D、 $S \cap T = \emptyset$ 2. 若 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域为 A , $g(x) = f(x+1) - f(x)$ 的定义域为 B , 那么A、 $A \cup B = R$ B、 $A \supset B$ C、 $A \subseteq B$ D、 $A \cap B = \emptyset$ 3. 已知 $\tan \alpha > 1$, 且 $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$, 则A、 $\cos \alpha > 0$ B、 $\cos \alpha < 0$ C、 $\cos \alpha = 0$ D、 $\cos \alpha$ 的符号不确定4. 设 $a > 0, a \neq 1$, 若 $y = a^x$ 的反函数的图像经过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4})$, 则 $a =$ A、 16 B、 4 C、 2 D、 $\sqrt{2}$ 5. 已知 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图像关于原点对称的充要条件是A、 $b = 0$ B、 $c = 0$ C、 $d = 0$ D、 $b = d = 0$ 6. 若 $\triangle ABC$ 三条边的长依次为 $a = \sin \frac{3}{4}, b = \cos \frac{3}{4}, c = 1$, 则三内角 A, B, C 的大小顺序为A、 $A < B < C$ B、 $B < A < C$ C、 $C < B < A$ D、 $C < A < B$ 7. 若实数满足 $\log_2 x = 3 + 2 \cos \theta$, 则 $|x - 2| + |x - 33|$ 等于A、 $35 - 2x$ B、 31 C、 $2x - 35$ D、 $2x - 35$ 或 $35 - 2x$ 8. 区间 $[0, m]$ 在映射 $f: x \rightarrow 2x + m$ 所得的象集区间为 $[a, b]$, 若区间 $[a, b]$ 的长度比区间 $[0, m]$ 的长度大 5, 则 $m =$

A、 5 B、 10 C、 2.5 D、 1

9. 设数列 $\{a_n\} (a_n > 0)$ 的前 n 项和是 S_n , 且 a_n 与 2 的算术平均值等于 S_n 与 2 的几何平均值, 则A、 $a_n = n^2 + n$ B、 $a_n = n^2 - n$ C、 $a_n = 3n - 1$ D、 $a_n = 4n - 2$ 10. 函数 $f(x) = -9x^2 - 6ax + 2a - a^2$ 在区间 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 上的最大值为 -3 , 则 a 的值是A、 $-\frac{3}{2}$ B、 $\sqrt{6} + 2$ 或 $-\sqrt{2}$ C、 $\sqrt{6} + 2$ 或 $2 - \sqrt{6}$ D、 $2 - \sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{2}$

二、A组填空题(每小题4分,共40分)

11. Aoshoo.com 防盗暗记. 已知定义在非零自然数集上的函数 $f(n) = \begin{cases} n+2, & n \leq 2005 \\ f(f(n-4)), & n > 2005 \end{cases}$, 则当 $n \leq 2005$ 时, $n - f(n) =$ _____; 当 $2005 < n \leq 2007$ 时, $n - f(n) =$ _____.12. 若 $\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1$, 则 $\cos \alpha \cdot \sin \beta =$ _____.13. 化简 $\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{7\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8}$ 的结果为 _____.

14. There are 2006 balls lined up in a row. They are coloured to be red, white, blue and black in the following order: 5 red, 4 white, 1 blue, 3 black, 5 red, 4 white, 1 blue, 3 black... Then the last ball is coloured to be _____. (英汉词典: to line up in a row 排列成一行; to colour 染色; order 顺序、次序)

15. 已知集合 $A = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{x | 4n+1, n \in \mathbb{N}^*\}$, 将 $A \cap B$ 中的元素从小到大排列形成一个数列 $\{a_n\}$, 则 $a_3 =$ _____, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

16. Suppose that the graph of quadratic function $f(x)$ passes through the origin, and there holds $f(x+2) = f(x) + x + 2$ for all $x \in \mathbb{R}$. Then the expression of $f(x)$ is _____.

(英汉词典: graph 图像、图形; quadratic 二次的、平方的; origin 原点; to hold 成立; expression 表达式)

17. $\tan 24^\circ + \sqrt{3} \tan 24^\circ \tan 36^\circ + \tan 36^\circ$ 的值为_____.

18. 计算 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2005^2 - 2006^2 =$ _____.

19. 王先生乘坐一辆出租车前往首都国际机场, 该车起价 10 元 (3 公里以内), 3 公里以外每行驶 0.6 公里增加 1 元, 当王先生到达机场时, 记价器显示应付费 34 元, 设王先生乘车路程为 s 公里, 则 s 的取值范围是_____.

20. 橙子奥数工作室防盗暗记. 已知 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1}, & (-\frac{1}{2} \leq x < 0), \\ \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & (x \geq 0), \end{cases}$ 则 $f^{-1}(x) =$ _____.

三、B 组填空题 (每小题 8, 共 40 分. 每小题两个空, 每空 4 分)

21. 设 $f(x) = x^2 + mx + 1$, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是_____; 若存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < -3$, 则 m 的取值范围是_____.

22. 试写出不定方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的两组整数解为_____.

23. 函数 $y = \sin[2(x - \frac{\pi}{3}) + \varphi]$ 是偶函数, 且 $0 < \varphi < \pi$, 则 $\varphi =$ _____, 其单调减区间是_____.

24. 数列 $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ 的通项公式 $a_n =$ _____, 前 n 项和 $S_n =$ _____ (分别用一个式子表示)

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项依次为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, 那么这个数列的第 2006 项是_____, 它的前 2006 项的和为_____.

简略答案: ABBBD ABADB

11、-2; 0 12、0 13、-3 14、red 15、729; $a_n = 9^n$ 16、 $f(x) = x^2/4 + x/2$

17、 $\sqrt{3}$ 18、-2013021 19、 $4 \leq s < 18$ 20、 $\begin{cases} \frac{x^2-1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & (x \geq 1) \end{cases}$

21、 $(-2, 2)$; $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ 22、 $(3, 2)$; $(17, 12)$ 23、 $\pi/6$; $[k\pi - \pi/2, k\pi], k \in \mathbb{Z}$

24、 $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\pi(n-2)}{3}$; $2n - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{n\pi}{3}$ 25、 $\frac{63}{54}$; $998 \frac{55}{64}$