

## 第三届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第2试

### 一、选择题

1、在 XOY 坐标平面内，除去点(1, 1), (2, -3)之外的所有点的集合是

A、 $\{(x, y) | x \neq 1, y \neq 1, x \neq 2, y \neq -3\}$  B、 $\{(x, y) | \begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} x \neq 2 \\ y \neq -3 \end{cases}\}$

C、 $\{(x, y) | \begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \neq 2 \\ y \neq -3 \end{cases}\}$  D、 $\{(x, y) | [(x-1)^2 + (y-1)^2] \cdot [(x-2)^2 + (y+3)^2] \neq 0\}$

2、设实数集 R 上定义的函数  $f(x)$ ，对任何  $x \in R$  都有  $f(x) + f(-x) = 1$ ，则这个函数的图象

A、关于原点对称 B、关于 y 轴对称 C、关于点 (0, 1) 对称 D、关于点 (1, 0) 对称

3、函数  $y = f(x)$ ， $y = g(x)$  的定义域、值域都是 R，并且它们都有反函数，则函数  $y = f^{-1}(g^{-1}(f(x)))$

的反函数是

A、 $y = f(g^{-1}(f(x)))$  B、 $y = f^{-1}(g(f(x)))$  C、 $y = f^{-1}(g^{-1}(f(x)))$  D、 $y = f(g^{-1}(f^{-1}(x)))$

4、集合  $X = \left\{ n \mid \frac{3^n + 4^n}{5} \in N, n \in N \right\}$ ，集合  $Y = \{ t \mid t = (2k-1)^2 + 1, k \in Z \}$ ，这两个集合的关系是

A、 $X = Y$  B、 $X \subset Y$  C、 $Y \subset X$  D、 $X \not\subset Y$  且  $Y \not\subset X$

5、点集  $\{(x, y) \mid ||x|-1| + |y| = 2\}$  的图形是一条封闭的折线，这条封闭折线围成的区域的面积是

A、14 B、16 C、18 D、20

6、空间给定不共面的 A、B、C、D 四个点，其中任意两点的距离都不相同，考虑具有如下性质的平面  $\alpha$ ：

A、B、C、D 中有三个点到  $\alpha$  的距离相同，另外一个点到  $\alpha$  的距离是前三个点到  $\alpha$  的距离的 2 倍，这样的平面  $\alpha$  的个数是

A、15 B、23 C、26 D、32

7、空间有折线 ABCD， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $0^\circ \leq \angle BCD \leq 60^\circ$ ，已知  $|AB| = |BC| = a$ ， $|CD| = b$  ( $a > b > 0$ )，则  $|AD| =$

A、 $\sqrt{3a^2 + b^2} - \sqrt{3ab}$  B、 $\sqrt{3a^2 + b^2} - 2\sqrt{3ab}$  C、 $\sqrt{3a^2 + b^2} - 3ab$  D、 $\sqrt{3a^2 + b^2} - 3\sqrt{3ab}$

8、正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 a，E 为 CD 的中点，F 为  $AA_1$  的中点，过 E、F、 $B_1$  的截面面积是

A、 $55\sqrt{5}a^2/192$  B、 $\sqrt{29}a^2/4$  C、 $11\sqrt{29}a^2/48$  D、 $7\sqrt{29}a^2/8$

9、锐角  $\alpha$ 、 $\beta$  满足条件  $\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^4 \beta}{\sin^2 \beta} = 1$ ，下列结论中正确的是

A、 $\alpha + \beta > \pi/2$  B、 $\alpha + \beta < \pi/2$  C、 $\alpha + \beta \neq \pi/2$  D、 $\alpha + \beta = \pi/2$

10、用  $n^3$  个棱长为 1 的小正方体堆成一个棱长为 n 的正方体 ( $n \in N, n \geq 2$ )，一条直线有某个小正方体内部的点时，叫做直线穿过这个小正方体，用一条直线所能穿过的小正方体的个数最多是

A、 $3n-2$  B、 $3n-1$  C、 $2n+1$  D、 $2n-1$

### 二、填空题

1、a, b 是异面直线，a, b 在不过 a, b 的一个平面  $\alpha$  内的射影分别是直线  $a', b'$ ，若  $a' \perp b'$ ，且  $a'$  与  $b'$  间

的距离是 1, 那么  $a, b$  之间的距离是\_\_\_\_\_.

2、长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=3$ ,  $BC=4$ ,  $CC_1=5$ , 一只小虫由  $A$  处出发沿长方体表面爬到  $C_1$ , 这只小虫爬行的最短路径的长度是\_\_\_\_\_.

3、不等式  $\log_6(1+\sqrt{x}) > \log_5(\sqrt{x})$  的解集 (区间形式) 是\_\_\_\_\_.

4、设  $(3x^4+7x^3+4x^2-7x-5)^5(3x^4-7x^3+4x^2+7x-5)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{40}x^{40}$ , 橙子奥数工作室录入暗记, 则  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{40} =$ \_\_\_\_\_.

5、函数  $f(x) = 1 - |1 - 2x|$ ,  $x \in [1, 0]$ , 橙子奥数工作室录入暗记, 函数  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $x \in [1, 0]$ . 定义函数  $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ , 方程  $F(x) \cdot 2^x = 1$  的实根个数是数\_\_\_\_\_.

6、 $x, y, t \in R$  且  $(x+6)t^2 + 16t + x - 6 = (y+12)t^2 - 18t + y - 12 = 0$ , 当  $x = -6$  时,  $y =$ \_\_\_\_\_.

7、空间  $A, B, C, D, E$  五个点中, 任意四点不共面, 任意两点间的距离不相等, 把以其中四个点为顶点的每一个空间四边形中最短的那条边染上黑色, 全部染完后, 从某点发出的黑色线段数目称为该点的希望数, 则各点希望数的最大值是\_\_\_\_\_.

8、 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$ ,  $a+b$  的最小值是\_\_\_\_\_.

9、设  $p$  是素数,  $n$  是一个三位数, 且  $1 \times 2 \times 3 \times 1992$  可被  $p^n$  整除, 但不可被  $p^{n+1}$  整除, 若要使  $n$  尽量小,  $p$  的数值应当是\_\_\_\_\_.

10、点  $P \in \alpha$ ,  $PA \perp \alpha$  于  $A$ ,  $PB$  与  $\alpha$  斜交于  $B$  点,  $PA = AB$ , 又有点  $C \in \alpha$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ , 则  $PB$  与  $AC$  所成角的余弦值是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

1、在边长为 3 的正三角形纸片  $ABC$  中,  $D, E$  是  $BC$  边上的三等分点, 以  $AD, AE$  为折痕把  $\triangle ABD, \triangle ACE$  翻折, 使  $AB$  与  $AC$  重合, 求折后相邻面形成的二面角的平面角的余弦值.

2、长方体的长、宽、高分别是 1990m, 1991m, 1992m, 把它剖分为  $1990 \times 1991 \times 1992$  个棱长为 1m 的正方体, 每个正方体看作一个房间, 两个房间如果有一个公共面, 则称它们是相邻的, 在其中一个房间里关着一只小鸟, 当管理员打开相邻的一个房间后, 小鸟就飞入新的房间. 这只小鸟有记忆能力, 总不飞入它曾经住过的房间, 现有甲、乙两个孩子, 轮番打开与小鸟居住的房间相邻的房间, 让小鸟搬家, 每人每次只允许打开一个新的房间让小鸟飞入, 设甲先打开第一个房间. 规定胜负的标准是: 谁不能让小鸟搬家, 谁就失败. 问: 甲、乙两人谁有必胜的策略? 这个人应当怎么办才能保证自己胜利? 如果长方体长、宽、高分别是 1991m, 1992m, 1993m, 情况又怎样? 如果长方体长、宽、高分别 1989m, 1991m, 1993m, 情况又怎样?