

第四届“希望杯”全国数学邀请赛（高一）第二试

一、选择题

1、函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$ 的单调递增区间是----- ()

- (A) $(-1,0]$ (B) $[0,1)$ (C) $(-\infty,0]$ (D) $[0,+\infty)$

2、 $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，在 $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha, \sec \alpha, \operatorname{csc} \alpha$ 中任意给定两个的数值，则角 α 的终边----- ()

- (A) 只有一个位置 (B) 恰有两个位置
(C) 恰有四个位置 (D) 有一个或两个位置

3、用 $|M|$ 表示非空有限集合 M 中所含的元素的个数，已知 $|P_1|=|P_2|$ ， $P_1 \subseteq P_2$ ，则在下列结论： $P_1 \cup P_2 = P_1$ ； $P_1 \cap P_2 = P_2$ ； $P_2 \subseteq P_1$ ； $P_1 = P_2$ 中，正确结论数目是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4、集合 $P = \{(x, y) | (y - |x|)(x - |y|) \neq 0\}$ ，这个集合表示的是----- ()

- (A) 坐标平面内除去第 1, 2, 3 象限角平分线的点集 (原点看成象限角平分线上的点)
(B) 坐标平面内除去第 1, 3, 4 象限角平分线的点集
(C) 坐标平面内除去第 1, 2, 4 象限角平分线的点集
(D) 坐标平面内除去第 2, 3, 4 象限角平分线的点集

5、 $x \in (2, 4)$ ， $a = 2^{x^2}$ ， $b = (2^x)^2$ ， $c = 2^{2^x}$ ， $d = (2^2)^x$ ，则有----- ()

- (A) $a > b > c > d$ (B) $a > c > b = d$ (C) $c > a > b = d$ (D) $b = d > a > c$

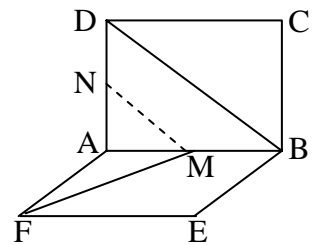
6、 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{6})$ ，设 M 是 $\cos(\cos \alpha)$ ， $\sin(\sin \alpha)$ 这两个数中大的一个， m 是这两个数中小的一个，则有----- ()

- (A) $\begin{cases} \cos(\cos \alpha) < M \\ \sin(\cos \alpha) < m \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \cos(\sin \alpha) > M \\ \sin(\cos \alpha) > m \end{cases}$
(C) $\begin{cases} \cos(\sin \alpha) > M \\ \sin(\cos \alpha) < m \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \cos(\sin \alpha) < M \\ \sin(\cos \alpha) > m \end{cases}$

7、矩形 $ABCD$ 与矩形 $ABEF$ 全等（见右图）， $D-AB-E$ 是直二面角， M 为 AB 的中点， FM 与 BD 成 θ 角，

$\sin \theta = \frac{\sqrt{78}}{9}$ ，则 $\frac{|AB|}{|BC|}$ 的值是----- ()

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (C) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



8、扇形 OAB （纸片）， O 为圆心， M 为弧 AB 的中点，以扇形 OAB 为侧面卷成的圆锥的体积为 V_1 ，以扇形 OAM 为侧面卷成的圆锥体积为 V_2 ，则有----- ()

- (A) $V_1 = 2V_2$ (B) $V_1 > 2V_2$ (C) $V_1 < 2V_2$ (D) V_1 与 $2V_2$ 的大小不定

- 9、 a, b, c 是三条两两异面的直线，与 a, b, c 都相交的直线的条数是----- ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 无数多
- 10、多面体表面上三个或三个以上平面的公共点称为多面体的顶点。用一个平面截一个 n 棱柱，($n \geq 3, n \in N$)，截去一个三棱锥，剩下的多面体顶点的数目是-()
 (A) $2n-1, 2n+1$ (B) $2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2$
 (C) $2n-1, 2n+1, 2n+2$ (D) $2n+1, 2n+2$

二、填空题

- 1、函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的单调增区间是_____。
- 2、线段 AB 的长为 10，A、B 与平面 α 的距离分别为 5，3，则 AB 的中点 M 与平面 α 的距离是_____。
- 3、设 $f(\lg x) = x$ ， $x \in (1, +\infty)$ ，则 $f(\lg \lg x) =$ _____。
- 4、函数 $f(x)$ 的定义域是 R ，函数 $g(x) = f(x) + 2 - f(-x)$ ，已知 $g(5) = -3$ ，则 $g(-5) =$ _____。
- 5、当 θ 为锐角时，实数 a 使得 $a^2 - 4a \cos \theta + 2 = a^2 - 4a \sin \theta - 2 = 0$ ，则 a 的值是__。
- 6、在各棱长度相等的三棱锥 A-BCD 中，AB，CD 是异面的棱，M，N 分别是 AB，CD 的中点，则 MN 与 AD 所成角的度数是_____。
- 7、用 n^3 个棱长为 1 的正方体积木拼成一个棱长为 n 的正方体大积木。从一个位置看大积木块，能看到的小正方体积木的数目的最大值是_____。
- 8、用 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。则 $[\sin 10^\circ] + [\sin 20^\circ] + [\sin 30^\circ] + \dots + [\sin 2000^\circ] =$ _____。
- 9、定义域为 R 的函数 $y = f(x)$ 的值域是 R^+ ，对任何 $x \in R$ ，都有 $\lg[f(x+1)] + \lg[f(x-1)] = \sqrt{2} \lg[f(x)]$ ，则 $f(x-2) \cdot f(x+2) =$ _____。
- 10、 $\sin x \cdot \sin y = 1 - \cos x \cdot \cos y$ ，则 $(\sin x + \cos x) - (\sin y + \cos y)$ 的值是_____。

三、解答题

- 1、奇函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2x - x^2$ ，设函数 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) 的值域为 $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$ ，($a \neq b$)，求 a, b 的值。
- 2、用四个边长分别为 a, b, c ($a > b > c > 0$) 的锐角三角形可以拼成一个四面体，把拼成的任何一个四面体的各棱用红、黄、蓝三色染色，每条棱染一色，每种色染两条棱。考虑一切经过这样染色的四面体。如果经过适当转动，两个染色四面体完全重合，并且重合的对应棱同色时，称这样的两个四面体是同一染色类。问：所有这样的染色四面体可分为几种染色类？