第五届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第二试

一、选择题

1、若$a,b>0,a,b\neq 1$，$\log_a b=\log_b a$，则--（　　）

（A）$a=b$　（B）$a=\frac{1}{b}$　　（C）$a=b$或$a=\frac{1}{b}$　（D）a,b为一切非 1 的正数

2、当$0<a<1$时，关于x的方程$(\log_{\frac{1}{a}} x)^4=(a^x)^4$的实根的个数是-----------（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）4

3、在正方形 ABCD 中，M、N 分别是 AD、BC 的中点，沿 MN 把这个正方形纸片折成以 MN 为棱的二面角 A-MN-C，使折后的锐角∠BMC 的正弦值为 0.6，这时二面角 A-MN-C 的平面角是---（　　）

（A）90°　　（B）60°　　（C）45°　　（D）30°

4、若$a>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$a\neq 1$，$x=|\log_a 2|$，$y=\log_{a+1}2$，$z=\log_{a+2}2$，则---（　　）

（A）$x>y>z$　（B）$z>y>x$　（C）$y>z>x$　（D）$y>z>x$

5、不等式$\lg x^4<\lg^3 x$的解是---（　　）

（A）$\frac{1}{100}<x<1$　　（B）$x>100$

（C）$0<x<1$或$x>100$　　（D）$\frac{1}{100}<x<1$或$x>100$

6、已知$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则数$M=3^{\cos^2 x}+3^{\sin^2 x}$的整数部分是----------------------（　　）

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）无法确定

7、设指数函数$y_1=a^x,y_2=b^x(a,b>0,a,b\neq 1)$的反函数依次是$f(x),g(x)$，若$\lg a+\lg b=0$，则$f(x)$与$g(x)$的图象的位置关系是-------------------------------（　　）

（A）关于直线$y=x$对称　　（B）关于y轴对称

（C）关于x轴对称　　（D）关于原点对称

8、给定三个不同的平面α,β,γ，若$\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，则$\alpha$与$\gamma$的位置关系是-----（　　）

（A）$\alpha\perp\gamma$　（B）$\alpha\parallel\gamma$　　（C）$\alpha\perp\gamma$或$\alpha\parallel\gamma$　　（D）不确定

9、若$\{1,x,x+y\}\cap\{x-y,x,1\}=\{3x-5,y\}$，则可推知--------------------------（　　）

（A）$(x-\frac{5}{2})^2+(y-1)^2\neq 0$　　（B）$x^2+y^2-4x-4y+8\neq 0$

（C）$(x^2+y^2-5x-2y+\frac{29}{4})[(x-2)^2+(y-2)^2]\neq 0$

（D）$(x^2+y^2-5x-2y+\frac{29}{2})[(x-2)^2+(y-2)^2]=0$

10、已知集合$M=\{x,y,z\}$，$T=\{1,0,-1\}$，则 M 到 T 的映射f满足$f(x)-f(y)=f(z)$，那么这样的映射的个数是-----------------------------------（　　）

（A）7　　（B）5　　（C）3　　（D）1

二、填空题

11、若$(2-6x+5x^2)^{1993}\cdot(4+5x-8x^2)^{1994}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则$n=$_______，$a_0+a_1+\cdots+a_n=$_________________。

12、一个正三棱柱的各个面所在的平面将空间分为k个部分，则k =_____________。

13、若$\cos\theta+\sin\theta=1$，则$\cos^{1226}\theta+\sin^{8341}\theta=$_________________。

14、若实数x满足$\log_6 x=1+\cos\theta$，则$|x+4|+|x-36|$=_______________.

15、已知α为锐角，$x>1$，若$2^{\log_{\cos\alpha}x}<2^{\log_{\sin\alpha}x}$，则$\alpha$的取值范围是__________。

16、$f(x)=\frac{2x}{1+x}$，则$f(1)+f(2)+\cdots+f(100)+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2})+\cdots+f(\frac{100}{2})+\cdots+f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\cdots+f(\frac{100}{100})$的值为_______。

17、设$\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$，A=$\cos\theta^{\sin\theta^{\sin\theta}}$，B=$\sin\theta^{\cos\theta^{\sin\theta}}$，C=$\cos\theta^{\sin\theta^{\cos\theta}}$，D=$\cos\theta^{\cos\theta^{\sin\theta}}$，则在 A、B、C、D 中最大的一个是_____________。

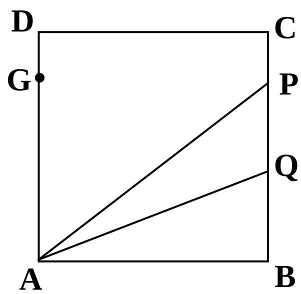
18、若函数 $f(x)=\frac{1}{2}(2^{x}-2^{-x})$，则 $f^{-1}(2)=$________________。

19、满足条件 $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le 4|x_1-x_2|$ 的函数 $\varphi(x)$ 形成一个集合 M，其中 $x_1,x_2\in R$，且 $x_1^2\le 1, x_2^2\le 1$，则函数 $y=f(x)=x^2+3x-2(x\in R)$ 与集合 M 之间的关系是________________。

20、定义域为 R 的函数 $f(x)$，对任何 $a,b\in R$ 都有 $f[af(b)]=ab$，则 $\sqrt{f^2(1994)}=$________________。

三、解答题

21、如图，正方形 ABCD 的边长为 $2a$，DG=$\frac{2a}{25}$，开始时 Q 与 B 重合，动点 P 与 Q 相距为 a，它们向上沿着正方形的边，经 C 等速运动到 P 与 G 重合。以 x 记点 P 到点 B 的路程，试写出这个运动过程中，ΔPAQ 的面积与 x 的函数关系 $f(x)$，并求出 $f(x)$ 的最小值。



22、在长方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=a，BC=b，$CC_1=c(a>b>c)$，过 BD_1 的截面的面积为 S，求 S 的最小值，并指出当 S 取最小值时截面的位置（即指出截面与有关棱的交点的位置）。