

## 第六届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第二试

### 一、选择题

- 1、设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数，则函数  $y_1 = f(1+x)$  与  $y_2 = f(1-x)$  的图象一定关于  
----- ( )  
(A)  $y$  轴对称 (B) 直线  $x=1$  对称 (C) 原点对称 (D) 直线  $y=x$  对称
- 2、二面角  $\alpha-l-\beta$  的大小为  $\varphi$ ，直线  $m \subset \alpha$ ， $m$  与  $\beta$  所成的角为  $\theta$ ，则----- ( )  
(A)  $\varphi \geq \theta$  (B)  $\varphi \leq \theta$   
(C) 当  $\varphi > 90^\circ$  时， $\varphi > \theta$ ；当  $\varphi \leq 90^\circ$  时， $\varphi \leq \theta$ 。  
(D)  $\varphi$  与  $\theta$  的大小关系不确定
- 3、如果函数  $y = f(x)$  有反函数，则方程  $f(x) = a$  ( $a$  是常数) ----- ( )  
(A) 有且仅有一个实根 (B) 至多有一个实根  
(C) 至少有一个实根 (D) 实根个数不少于 2
- 4、当  $\alpha \in (0, \pi)$  时，以下各式中一定成立的是----- ( )  
(A)  $\alpha \cdot \sin \alpha + |\cos \alpha| > 1$  (B)  $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$   
(C)  $\sin \alpha + \alpha \cdot |\cos \alpha| > 1$  (D)  $\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha > 0$
- 5、过正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱  $AB$ 、 $BC$  的中点  $E$ 、 $F$  作一个截面，使截面与底面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$ ，则此截面的形状是----- ( )  
(A) 三角形或五边形 (B) 三角形或六边形  
(C) 六边形 (D) 三角形或四边形
- 6、如果函数  $y = f(x)$  有反函数  $y = f^{-1}(x)$ ，则以下命题中正确的是----- ( )  
(A) 若  $y = f(x)$  是增函数，则  $y = f^{-1}(x)$  是减函数  
(B) 若  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图象有公共点，则公共点必在直线  $y = x$  上  
(C) 若  $y = f(x)$  的图象与直线  $y = x$  没有公共点，则  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图象也没有公共点  
(D) 若  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图象没有公共点，则  $y = f(x)$  与  $y = x$  的图象也没有公共点。
- 7、已知  $0 < a < 1$ ， $b = a^a$ ， $c = b^a$ ， $d = a^b$ ，则  $b, c, d$  的大小关系是----- ( )  
(A)  $c > b > d$  (B)  $b > c = d$  (C)  $c > d > b$  (D)  $c = d > b$

8、平面  $\alpha$ 、 $\beta$  所成的锐角为  $40^\circ$ ，过空间中一个定点 P 作与  $\alpha$ 、 $\beta$  所成的角都等于  $80^\circ$  的平面，这样的平面有且仅有----- ( )

- (A) 1 个      (B) 2 个      (C) 3 个      (D) 4 个

9、函数  $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$ ----- ( )

- (A) 是非单调函数，没有反函数    (B) 有反函数，且反函数是增函数  
 (C) 有反函数，且反函数是减函数    (D) 有反函数，且反函数是非单调函数

10、已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1，点 A 关于直线  $BD_1$ 、 $A_1C$  的对称点分别为 P、Q，则 P、Q 间距离等于----- ( )

- (A)  $\sqrt{2}$       (B)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       (C)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       (D) 0

二、填空题

11、为得到函数  $f(1-2x)$  的图象，可以通过对函数  $y = f(3-2x)$  的图象进行适当变动得到，这种变动可以是沿\_\_\_\_轴向\_\_\_\_平移\_\_\_\_\_个单位。

12、如果  $\log_a \frac{3}{4} < 1$ ，那么  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

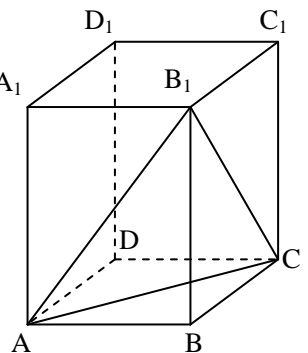
13、当  $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  时，函数  $f(x) = (\sec \alpha)^{-x^2+2x}$  的最大值为 2，则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_。

14、已知函数  $f(x+a) = |x-2| - |x+2|$ ，且  $f[f(a)] = 3$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_。

15、若  $a > 0, a \neq 1$ ，且  $|\log_a 2| > \log_{a+1} 2$ ，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

16、平行四边形 ABCD 的边长  $AB=2a$ ， $AD=a$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，M、N 分别是 AB、CD 的中点，以 MN 为棱，将此平行四边形折成  $60^\circ$  的二面角 B-MN-A，得到一个三棱柱 ABM-DCN，则此棱柱的侧面积等于\_\_\_\_\_。

17、如右图 正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为 1，高为  $\sqrt{3}$ ， $A_1$  则 A 点到平面  $A_1C_1B$  的距离为\_\_\_\_\_。



18、二面角  $\alpha - BC - \beta$  的大小为  $135^\circ$ ，且  $A \in \alpha$ ， $D \in \beta$ ， $AB \perp BC$ ， $BC \perp CD$ ，且  $AB=BC=1$ ， $CD=\sqrt{2}$ ，则二面角 A-BD-C 的大小为\_\_\_\_\_。

19、y 轴上有一点  $P(0, a)$ ，如果函数  $y = f(x) = |x^2 - 1|$  的图象上恰有三个点与 P 点等距离，那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

20、过正四面体 ABCD 的顶点 A 作一个形状为等腰三角形的截面，且使截面与底面 BCD 所成角为  $75^\circ$ ，这样的截面共可作出\_\_\_\_\_个。

### 三、解答题

21、正方形 ABCD 的边长为 3，E 在 AB 边上，且  $AE=1$ ，甲、乙两人做如下游戏：甲先在线段 BE 上选一点 X，然后乙在 BC 边上选一点 Y，再将此正方形沿 DX、DY 折起，使 A、C 重合于 A' 点。甲力争使 A'D 与平面 DXY 所成角尽可能小，乙力争使这个角尽可能大。如果两人都采取了正确的策略，游戏停止后，求 A'D 与平面 DXY 所成角的正切值，并求此时 X、Y 点的位置。

22、函数  $y = f(x)$  是偶函数，且是周期为 2 的周期函数。当  $x \in [2,3]$  时， $f(x) = x - 1$ ，在  $y = f(x)$  的图象上有两点 A、B，它们的纵坐标相等（A 点在 B 点的左边）横坐标都在区间  $[1,3]$  上，定点 C 的坐标为  $(0, a)$ ，其中  $a > 2$ ，求  $\triangle ABC$  面积的最大值（用  $a$  表示）。