

## 第七届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第二试

### 一、选择题

- 1、已知函数  $f(x) = ax^3 + b \sin x + 10$  , 且  $f(1) = 5$  , 则  $f(-1)$  的值是----- ( )  
(A) -5 (B) 15 (C) 5 (D) 不确定的
- 2、 $\alpha$ 、 $\beta$  都是第二象限的角, 以下命题中正确的是----- ( )  
(A) 若  $\alpha > \beta$  , 则  $\sin \alpha < \sin \beta$  (B) 若  $\alpha > \beta$  , 则  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$   
(C) 若  $\sin \alpha > \sin \beta$  , 则  $\cos \alpha > \cos \beta$  (D) 若  $\sin \alpha > \sin \beta$  , 则  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$
- 3、函数  $\sin x \cdot |\cos x|$  的最小正周期是----- ( )  
(A)  $2\pi$  (B)  $\pi$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D) 不存在
- 4、设函数  $y = 2^x$  的图象为  $C$  , 某函数的图象  $C'$  与  $C$  关于直线  $x = 2$  对称, 那么这个函数是----- ( )  
(A)  $y = 2^{-x}$  (B)  $y = 2^{2-x}$  (C)  $y = 2^{4-x}$  (D)  $y = 2^{x-4}$
- 5、已知  $\sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$  , 则  $\alpha$  的取值范围是----- ( )  
(A)  $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}]$  (B)  $[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$   
(C)  $[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$  (D)  $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$  (以上  $k \in Z$ )
- 6、已知函数  $f(x) = |2^x - 1|$  ,  $a < b < c$  , 且  $f(a) > f(c) > f(b)$  , 则----- ( )  
(A)  $a < 0, b < 0, c < 0$  (B)  $a < 0, b \geq 0, c > 0$   
(C)  $2^{-a} < 2^c$  (D)  $2^a + 2^c < 2$
- 7、已知函数  $f(n) = k$  ,  $k$  是循环小数  $0.\dot{9}1827364\dot{5}$  的小数点后的第  $n$  位数字, 则  $f\{f \cdots f[f(1)] \cdots\}$  的值为----- ( )  
(A) 9 (B) 7 (C) 3 (D) 4
- 8、二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0, c \neq 0$ ) 的值域为  $M$  ,  $y = cx^2 + bx + a$  的值域为  $N$  , 则集合  $M$ 、 $N$  的关系是----- ( )  
(A)  $M \subseteq N$  (B)  $M \supseteq N$  (C)  $M = N$  (D)  $M \cap N = \Phi$
- 9、在正方体的 12 条面对角线所在的直线中存在异面直线, 如果其中两条异面直线间的距离是 1, 那么这个正方体棱长可能取的值的集合是----- ( )  
(A)  $\{1\}$  (B)  $\{\sqrt{3}\}$  (C)  $\{1, \sqrt{3}\}$  (D)  $\{1, \sqrt{2}\}$
- 10、四面体的六条棱长分别为 7, 13, 18, 27, 36, 41。已知  $AB=41$  , 则棱  $CD$  的长为----- ( )  
(A) 27 (B) 18 (C) 13 (D) 17

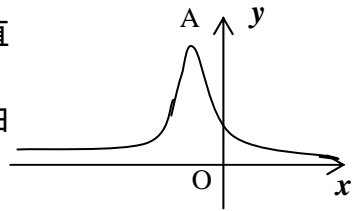
### 二、填空题

- 11、某班共 50 名学生, 其中女团员 7 人, 住校的女生 9 人, 不住校的团员共 15 人,

住校的男团员有 6 人，男生中非团员且不住校的有 8 人，女生中非团员且不住校的有 3 人，共有男生 33 人，则住校学生共有\_\_\_\_\_人，全班非团员共\_\_\_\_\_人。

12、右图为函数的图象，A 点坐标为 $(-\frac{1}{2}, 4)$ ，在直

线 $x = -\frac{1}{2}$ 左方是幂函数曲线，右方是指数函数曲线，则此函数的解析式是\_\_\_\_\_。



13、已知棱长为 1 的正方体，以它的 8 个顶点为顶点组成三角形，其中面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的有\_\_\_\_\_个。

14、抛物线 $y = x^2 - bx$ ， $y = -x^2 + bx$ 与直线 $y = kx$ 最多能把平面分成\_\_\_\_\_部分。

15、函数 $y = \begin{cases} x^2 & (x \leq 0) \\ -2x & (x > 0) \end{cases}$ 的反函数为\_\_\_\_\_。

16、函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{-1}, y = x^{-2}, y = x^{\frac{2}{3}}$ 的图象与直线 $x = a$ 的公共点分别为 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ，则当点集 $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ 中元素个数最少时， $a$ 值为\_\_\_\_\_。

17、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则到直线 $A_1D_1$ 及 $AB_1$ 的距离相等的截面的面积为\_\_\_\_\_。

18、若 $\sin \theta, \cos \theta$ 是关于 $x$ 的方程 $8x^2 + 6kx + 2k + 1 = 0$ 的两个实根，则 $k$ 值为\_\_\_\_\_。

19、一只蚂蚁从长方体的顶点 A 出发沿各行其长方体的棱爬行，要经过每个顶点一次且只经过一次，则不同爬法的种数为\_\_\_\_\_。

20、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 是面对角线 $AB_1$ 上一动点，Q 是底面 ABCD 上一动点，则 $C_1P + PQ$ 的最小值为\_\_\_\_\_。

### 三、解答题

21、(1) 试画出由方程 $\frac{\lg(6-x) + \lg(x-2) + \log_{\frac{1}{10}}(x-2)}{\lg(2y)} = \frac{1}{2}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的图象；

(2) 若函数 $y = ax + \frac{1}{2}$ 与 $y = f(x)$ 的图象恰有一个公共点，求 $a$ 的取值范围。

22、正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上下底面边长分别为 $A_1B_1=2, AB=4$ ，高为 $\sqrt{6}$ ，E 为 BC 中点，作平行于底面的截面，与线段 $AD_1, AB_1, C_1E$ 分别相交于 X、Y、Z，求 XYZ 面积的取值范围。