

第八届“希望杯”全国数学邀请赛（高一）第二试

一、选择题

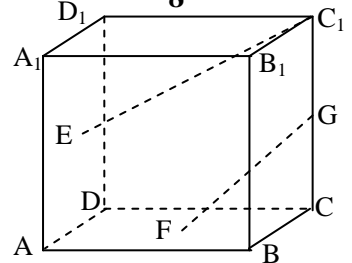
1、集合 $P = \{x | x = \frac{2k+1}{4}, k \in Z\}$, $q = \{x | x = \frac{k+2}{4}, k \in Z\}$, 则有----- ()
 (A) $P = Q$ (B) $P \supset Q$ (C) $P \subset Q$ (D) $P \cap Q = \emptyset$

2、方程 $|\sin x| + |\cos x| = \frac{\pi}{4}$ 的解的情况为----- ()
 (A) 无解 (B) 有无数个解 (C) 有唯一解 (D) 有多于 1 个的有限个解

3、函数 $y = 2\sin 4x$ 的图象在 y 轴右边的第 3 条对称轴的方程是----- ()

(A) $x = \frac{9\pi}{8}$ (B) $x = 10\pi$ (C) $x = \frac{13\pi}{2}$ (D) $x = \frac{5\pi}{8}$

4、如图 1，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是正方形 ADD_1A_1 、 $ABCD$ 的中心，G 为 CC_1 的中点，设 GF 与 AB 所成的角为 α ， C_1E 与 AB 所成的角为 β ，则 $\alpha + \beta =$ ----- ()



(A) 30° (B) 60°
 (C) 90° (D) 120°

5、在 xoy 平面内，如果一条直线上只有一个点在幂函数的图象上，这条直线上除这个点外的任何点都不在任何一个幂函数的图象上，这样的直线称为“特殊直线”，关于“特殊直线”的数目，下列各说法中正确的是----- ()

(A) 1 (B) 2 (C) 不少于 3 (D) 0

6、三棱锥 6 条棱所在直线中，互相垂直的成对直线至多有----- ()

(A) 5 对 (B) 6 对 (C) 7 对 (D) 9 对

7、函数 $y = f(x+1)$ 与函数 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图象----- ()

(A) 关于直线 $y = x$ 对称 (B) 关于直线 $y = x + 1$ 对称
 (C) 关于直线 $y = x - 1$ 对称 (D) 关于直线 $y = -x$ 对称

8、 l_1 、 l_2 是异面直线，以下命题中错误的是----- ()

(A) 存在唯一的平面与 l_1 、 l_2 都平行，且与 l_1 、 l_2 距离相等
 (B) 过 l_1 、 l_2 外一点能作且只能作一个平面与 l_1 、 l_2 都平行
 (C) 与 l_1 、 l_2 都垂直的直线有无穷多条
 (D) 不存在与 l_1 、 l_2 都垂直的平面

9、设 $f(x)$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数， $f(x+3) = -f(x)$ ，当 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时， $f(x) = x$ ，则 $f(1997)$ 等于----- ()

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 1997

10、将棱长为 5 的正方体锯成棱长为 1 的 125 个小正方体，锯 12 次可达到目的，请你想办法尽可能少锯几次，那么至少需要锯----- ()

(A) 7次 (B) 8次 (C) 9次 (D) 10次

二、填空题

11、 $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$ ，则 $x:y$ 的值等于_____。

12、当 $a > 1$ 时，若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ 的定义域和值域都是 $[1, a]$ ，则 $a =$ _____。

13、若函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是_____。

14、已知函数 $f(x) = x^2 + \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，且 $f(2) = 4.627$ ，则 $f(-2) =$ _____。

15、AA'DB 是等腰梯形， $AB = A'D$ ，下底 $BD = 2$ ，上底 $AA' = 4$ ，S、C 分别是 AA'、BD 的中点， $SC = 1$ ，沿 SB、SC、SD 折叠，使这梯形成为一个四棱锥 S-ABCD 的各侧面 (A、A'重合)，则此棱锥底面上的对角线 AC 的长等于_____。

16、对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ ，规定：当 $f(x) \leq g(x)$ 时， $f(x) \quad g(x) = f(x)$ ；当 $f(x) > g(x)$ 时， $f(x) \quad g(x) = g(x)$ 。已知 $f(x) = 3 - x$ ， $g(x) = (2x + 5)^{\frac{1}{2}}$ ，则 $f(x) \quad g(x)$ 的最大值为_____。

17、若一个圆锥中有三条母线两两垂直，则此圆锥侧面展开图扇形的圆心角为_____。

18、长方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 的对角线 BD₁ 与面 AB₁ 成 25° 角，BD₁ 与面 A₁C₁ 成 45° 角，则 BD₁ 与这个长方体各棱所成角中最大的角等于_____。

19、平行光线照射到一个棱长为 1 的正方体上，在正方体后面的平面上留下的影子的面积为 S，则 S 的最大值为_____。

20、正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 的棱长为 1，在正方体表面上与点 A 距离是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的集合形成一条曲线，这条曲线的长度是_____。

三、解答题

21、空间从 O 点出发的 4 条射线 OA、OB、OC、OD 两两所成角相等，求 OA 与平面 OBC 所成角的余弦值。

22、已知函数 $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x + c$ ，其中 a 、 b 、 c 是非零实数，甲、乙两人做一游戏：他们轮流确定系数 a 、 b 、 c (如甲令 $b = 1$ ，乙令 $a = -2$ ，甲再令 $c = 3$) 后，如果对于任意实数 x ， $f(x) \neq 0$ ，那么甲得胜；如果存在实数 x ，使 $f(x) = 0$ ，那么乙得胜。甲先选数，他是否有必胜策略？为什么？如果 a 、 b 、 c 是任意实数，结论如何？为什么？