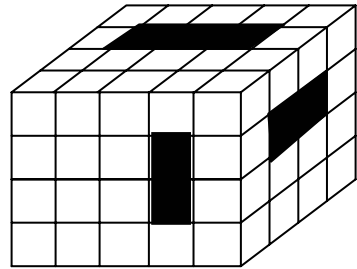


第九届“希望杯”全国数学邀请赛（高一）第二试

一、选择题

- 正方体每个面上正方形的对角线叫做正方体的面对角线。在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与 BD_1 垂直的面对角线的条数是-----
()
(A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 9
- 若函数 $f(x) = \frac{x}{2} + a$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = bx - 5$ ，则----- ()
(A) $a + b = 7$ (B) $2a + b = 7$ (C) $a - b = 3$ (D) $a - 2b = 1$
- 若 $\log_x 2 < \log_y 2 < 0$ ，则----- ()
(A) $0 < y < x < 1$ (B) $0 < x < y < 1$ (C) $y > x > 1$ (D) $x > y > 1$
- 如图所示是一个 $5 \times 4 \times 4$ 的长方体，上面有 $2 \times 1 \times 4$ ， $2 \times 1 \times 5$ ， $3 \times 1 \times 4$ 的穿透的洞，剩下部分的体积为----- ()
(A) 50 (B) 54
(C) 56 (D) 58
- 设函数 $y = f(x)$ 是周期为 2 的偶函数，且在区间 $[0, 1]$ 内单调递减，则 $f(-1), f(0), f(2.5)$ 的大小关系是----- ()
(A) $f(-1) < f(2.5) < f(0)$ (B) $f(-1) < f(0) < f(2.5)$
(C) $f(0) < f(2.5) < f(-1)$ (D) $f(2.5) < f(0) < f(-1)$
- P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $PA \perp$ 平面 ABC，则在以下结论中正确的是----- ()
(A) $\angle BPC < \angle BAC$ (B) $\angle BPC > \angle BAC$
(C) $\angle BPC = \angle BAC$ (D) $\angle BPC$ 与 $\angle BAC$ 的大小关系不确定
- 在锐角三角形 ABC 中，一定有----- ()
(A) $\cos A < \sin B$ (B) $\cos A > \sin B$
(C) $\tan A > \sin B$ (D) $\cos A$ 与 $\sin B$ 的大小关系不确定
- 在正五棱柱 $ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$ 的侧棱 CC_1 上有一点 P，若截面 PAE_1 与侧面 AEE_1A_1 互相垂直，则这样的 P 点----- ()
(A) 一般有两个，特殊情况下仅有一个。 (B) 有且仅有一个
(C) 有两个 (D) 有时不存在
- 在区间 $[2, 3]$ 上，方程 $\log_2 \log_3^x = \log_3 \log_2^x$ 的实根个数是----- ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 无数个
- 四个面都是正三角形的几何体叫做正四面体。用一个平面去切正四面体，使它成为形状大小都相同的两个几何体，这样的平面的个数为----- ()
(A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 无数个



二、填空题

- 11、关于 x 的方程 $\log_a(1 + \frac{2}{x-1}) = \log_2(1 - \frac{2}{x+1})$, ($a > 0, a \neq 1$) 的解集为_____。
- 12、空间四边形 ABCD 中 , $AB=AD=2$, $BC=CD=3$, 则 BD 与 AC 所成的角的正弦值为_____。
- 13、函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq 2) \\ 2^x & (x > 2) \end{cases}$ 的反函数为_____。
- 14、函数 $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$ 的值域为_____。
- 15、若 $f(x) = 3^x + \log_3 x + 2$, 则 $f^{-1}(30) =$ _____。
- 16、若 $f(x) = \log_a(ax - 1)$ 在区间 $[2, 3)$ 上是减函数 , 则实数 a 的取值范围是_____。
- 17、函数 $y = f(x)$ 对于任意实数 x, y 都满足 $f(x + y^2) = f(x) + 2[f(y)]^2$, 且 $f(1) \neq 0$, 则 $f(1998) =$ _____。
- 18、关于 x 的方程 $kx^2 + x + k + 1 = 0$ 有两个实根 , 一个比 2 大 , 另一个比 1 小 , 则 k 的取值范围是_____。
- 19、在长方体 $ABCE-A_1B_1C_1D_1$ 中 , $AB = \sqrt{2}$, $BC = AA_1 = 1$, P 是对角线 AC_1 上的一个动点 , Q 是底面 ABCD 上的一个动点 , 则 $B_1P + PQ$ 的最小值为_____。
- 20、三棱锥 $P-ABC$ 中 , $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$, D 为底面 ABC 内的一点 , $\angle APD = 45^\circ$, $\angle BPD = 60^\circ$, 则 $\angle CPD$ 的余弦值为_____。

三、解答题

- 21、已知 $a, b, c > 0$ 且 $a, b, c \neq 1$, $a^b = c, b^c = a$, 试比较 a, b, c 的大小 , 并说明理由。
- 22、 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形 , $PA \perp$ 平面 ABC , 且 $PA = \frac{\sqrt{6}}{4}$, A 点关于平面 PBC 的对称点为 A' , 求直线 $A'C$ 与 AB 所成角的余弦值。