

第十届“希望杯”全国数学邀请赛(高一)第二试

一、选择题

1、已知 $A: |\sin A| = |\sin B|$, $B: \sin(A+B) = 0$, 则----- ()

- (A) 由 A 可推出 B, 但由 B 推不出 A。
- (B) 由 B 可推出 A, 但由 A 推不出 B。
- (C) 由 A 可推出 B, 由 B 也可推出 A。
- (D) 由 A 推不出 B, 由 B 也推不出 A。

2、定义域为 \mathbb{R} 的函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x-1) = f(2-x)$, 这个函数图象的对称轴是

----- ()

- (A) $x = 0$
- (B) $x = \frac{1}{2}$
- (C) $x = 1$
- (D) $x = 2$

3、最小正周期为 T 的周期函数 $y = f(x)$, 当 $x \in (0, T)$ 时, 反函数是 $y = f^{-1}(x)$ (定义域为 D), 那么当 $x \in (-T, 0)$ 时, $y = f(x)$ 的反函数是----- ()

- (A) $y = f^{-1}(x+T), x \in D$
- (B) $y = f^{-1}(x)+T, x \in D$
- (C) $y = f^{-1}(x-T), x \in D$
- (D) $y = f^{-1}(x)-T, x \in D$

4、二面角 $M-l-N$ 的平面角是 60° , 直线 $a \subset$ 平面 M , a 与棱 l 所成的角是 30° , 则 a 与平面 N 所成的角的余弦值是----- ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C) $\frac{\sqrt{13}}{4}$
- (D) $\frac{1}{2}$

5、设集合 $A = \{1, 2\}$, 则从 A 到 A 的映射 f 中满足 $f[f(x)] = f(x)$ 的映射的个数是----- ()

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

6、设 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 记 $f_n(x) = \underbrace{f\{f[f\cdots f(x)]\}}_{n \text{ 个 } f}$, 则 $f_{1999}(x) =$ ----- ()

- (A) $-\frac{1}{x}$
- (B) x
- (C) $\frac{1+x}{1-x}$
- (D) $\frac{x-1}{x+1}$

- 7、由四个全等的正三角形围成的空间图形叫正四面体。正四面体的四个正三角形面的12条中线能形成数值不同的 k 个锐角,则 k 的数值是-----()
 (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4
- 8、方程 $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 的整数解的个数是-----()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 9、 p, q 都是奇数,二次方程 $x^2 + 2px + 2q = 0$ 有实根,那么它的根一定是----()
 (A) 奇数 (B) 偶数 (C) 有理数但不是整数 (D) 无理数
- 10、若函数 $f(x) = 25^{-|x+1|} - 4 \cdot 5^{-|x+1|} - m$ 的图象与 x 轴有交点,则实数 m 的取值范围是-----()
 (A) $m < 0$ (B) $m \geq -4$ (C) $-4 \leq m < 0$ (D) $-3 \leq m < 0$

二、填空题

11、已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$,且 $f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2$,

则 $f(x_1 + x_2) =$ _____。

12、已知 $a, b, c > 0$ 且 $a, b, c \neq 1$,

则 $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} - a^{\log_c b} - b^{\log_a c} - c^{\log_b a}$ 的值等于_____。

13、一个锐角为 30° ,斜边长为2的直角三角形纸片,以斜边上的中线为折痕折成直二面角,折后斜边两个端点的距离等于_____。

14、函数 $y = \frac{1}{x-1} (x \neq \pm 1)$ 可以表示成一个偶函数 $f(x)$ 与一个奇函数 $g(x)$ 的和,

则 $f(x) =$ _____。

15、设函数 $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$,若函数 $g(x)$ 与 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对

称,则 $g(3) =$ _____。

16、圆柱形钢管在运输中被捆紧成正六棱柱的形状,已知每个侧面恰有10根钢管,则整捆钢管有_____根。若钢管直径为 d ,则捆钢管的铅丝每圈的长度为_____。

17、函数 $y = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[0, 1]$ 上恰好有50个最大值,则 ω 的取值范围是_____。

18、图 1 为一个长方体盒子的展开图（重叠部分不计），尺寸如图所示，点 P、Q 是原长方体盒子中不在一个面上的两个顶点，则在长方体盒子中，P、Q 的距离等于_____。

19、函数 $f(x) = \log_2(1 - 2\sin x)$ 的递增区间是_____。

20、若干个正方体形状的积木摆成塔形：上面正方体中下底的四个顶点，是下面相邻正方体中上底各边的中点，最下面的正方体的棱长为 1，平放于桌面上，如果所有正方体能直接看到的表面积超过 8.8，则正方体的个数至少是_____。

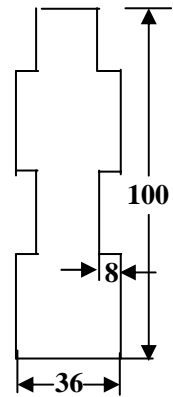


图
1

三、解答题

21、 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$ ，方程 $f(x) = x$ 的两个根是 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 > 0$ ，

$x_2 - x_1 > \frac{1}{a}$ ，又若 $0 < t < x_1$ ，试比较 $f(t)$ 与 x_1 的大小。

22、图 2 是以 4 个腰长为 1 的等腰直角三角形为侧面的棱锥，其中的四个直角是 $\angle APD$ ， $\angle APB$ ， $\angle PBC$ ， $\angle PDC$ ，求棱锥的高。

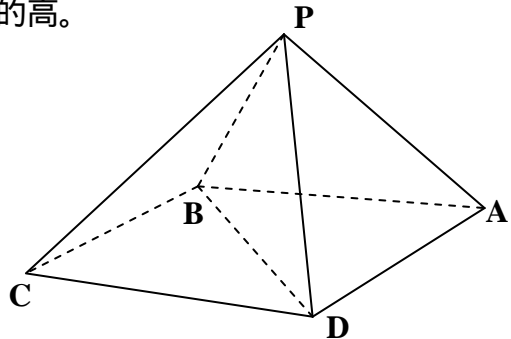


图 2