

第十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第2试

一、选择题

1. 已知 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 从 A 到 B 的对应法则分别为

(1) $x \rightarrow y = \frac{1}{2}(x+1)$ (2) $x \rightarrow y = |x-1|$ (3) $x \rightarrow y = \sqrt{x+1}$ (4) $x \rightarrow y = \sqrt[3]{x+2}$

其中能构成 $A \rightarrow B$ 的映射的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 设 $B = \{0,1,2\}$, $A = \{x | x \subseteq B\}$, 则 A 与 B 的关系是

A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$ C. $A \in B$ D. $B \in A$

3. 方程 $2x+2 = |x+3| - |x-1|$ 的解的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 无穷多

4. 要得到函数 $y = -\sin 2x$ 的图象, 可将 $y = \cos 2x$ 的图象

(1) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ (2) 向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ (3) 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ (4) 向右平移 $\frac{3\pi}{2}$

其中正确移法的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 已知命题 P : 存在 $x \in R$, 使 $x^2 - 3x + 3 \leq 0$, 则

A. \bar{P} : 存在 $x \in R$, 使 $x^2 - 3x + 3 > 0$, 且 \bar{P} 为真

B. \bar{P} : 存在 $x \in R$, 使 $x^2 - 3x + 3 > 0$, 且 \bar{P} 为假

C. \bar{P} : 对任意 $x \in R$, 都有 $x^2 - 3x + 3 > 0$, 且 \bar{P} 为真

D. \bar{P} : 对任意 $x \in R$, 都有 $x^2 - 3x + 3 > 0$, 且 \bar{P} 为假

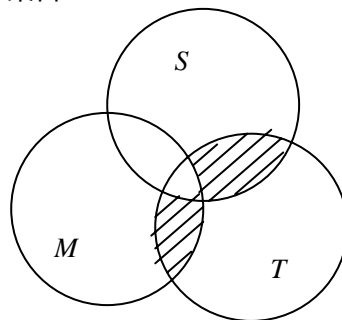
6. 如右图, 三个圆分别表示集合 M 、 S 、 T , 则阴影部分表示集合

(A) $(S \cap T) \cup (T \cap M)$

(B) $(M \cup S) \cap T$

(C) $\{x | x \in (M \cup S) \cap T, x \notin M \cap S\}$

(D) $\{x | x \in (M \cap S) \cup (S \cap T) \cup (T \cap M), x \notin M \cap S \cap T\}$



7. 若 $\sin x = \cos y$, 且 $\cos x = \sin y$, 则 x 和 y 的关系是 ()

A. $x = \frac{\pi}{2} - y$ B. $x = 2k\pi + y (k \in Z)$

C. $x + y = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi (k \in Z)$ D. $x - y = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi (k \in Z)$

8. 已知函数 $f(x)$ 是 R 上的增函数, 他的图象经过点 $A(0, -2), B(3, 2)$, 则不等式 $|f(x+1)| \geq 2$ 的解集为

- A. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, -1]$ D. $[3, +\infty)$

9. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 抛物线上的另一点 C 与 A, B 是同一个正三角形的顶点, 则 $b^2 - 4ac$ 的值是

- A. 12 B. 15 C. 18 D. 不确定的正数

10. 将数列 $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ 依次排成五列, 如右图。最左边的一列叫做第 1 列, 从左到右依次按列编号; 把最上边的一行叫做第 1 行, 从上向下依次按行编号 (如图中的第 2 行, 第 3 列的数为 19), 则位于图中第 251 行、第 2 列的数为

	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	

- A. 2001 B. 1997 C. 1999 D. 2003

二、填空题

11. $\lg |\tan 91^\circ| + \lg |\tan 92^\circ| + \lg |\tan 93^\circ| + \dots + \lg |\tan 178^\circ| + \lg |\tan 179^\circ| = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设 $x = \log_a(\log_b c), y = \log_b(\log_c a), z = \log_c(\log_a b), (a, b, c > 0, a, b, c \neq 1)$, 则 $a^x b^y c^z$ 的值是_____.

13. 把函数 $y = 4 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{5}$, 纵坐标放大为原来的 5 倍, 则所得曲线对应的函数是_____.

14. 将函数 $f(x) = \lg(x^2 - x + 1)$ 写成一个偶函数及一个奇函数的和, 其中的奇函数为_____.

15. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 与 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 的图象有两个交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则 $x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 4\}, B = \{(x, y) | x^2 - y \neq 4\}$, 若用列举法表示, 则 $\overline{A \cup B} = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 四个学生参加一次数学竞赛, 每人预测获奖情况如下:

甲: 如果乙获奖, 那么我就没获奖 乙: 甲没有获奖, 丁也没有获奖

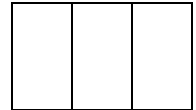
丙: 甲获奖或者乙获奖 丁: 如果丙没有获奖, 那么乙获奖

竞赛结果实际有 1 人获奖, 且四人的预测中恰有 3 人正确, 则获奖者是_____.

18. The number of positive integers from 1 to 500 that can be expressed in the form a^b with a and b being integers greater than 1 is _____. (英汉小字典: positive integer 正整数)

19. If the equation $x^6 + px^4 + qx^2 - 225 = 0$ has six real roots in arithmetic progression, then the value of q is _____. (英汉小字典: arithmetic progression 等差数列)

20. 某村计划建一长方形水产养殖池, 用两道隔墙将其分成 3 个容积相等的养殖池, 如右图, 不计池壁及隔墙厚度, 池底总面积为 800m^2 , 池深 10m, 四周池



壁及池底造价均为 $80\text{元}/\text{m}^2$, 那么当总造价最低时, 池的长度为_____m, 宽度为_____m.

三、解答题

21. 从半径为 1 的圆铁片中去掉一个半径为 1、圆心角为 x 的扇形, 将余下的部分卷成无盖圆锥。

- (1) 用 x 表示圆锥的体积 V ;
- (2) 求 V 的最大值。

22. 一个等差数列 $\{a_n\}$ 中的部分项 $\{a_{b_i}\}$ 成等比数列, 已知 $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 12$,

- (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

23. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 2$ 交于点 A , 且 A 点关于原点 O 的对称点 B 也在抛物线上; $|AB| = 4\sqrt{5}$ 。又知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 -5 , 求 a 、 b 、