

第十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第2试

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{y \mid y = \cos \frac{\pi x}{2}, x \in N\}$, $B = \{y \mid y = \sin \frac{\pi x}{4}, x \in N\}$, 则
- A、 $A \supset B$ B、 $A \subset B$ C、 $A = B$ D、 $A \in B$
2. 若 $a+m=b+n=c+p=d+q$, 其中 $m < 0, n > 0, p < 0, q > 0$, 且 $m > p$ 那么 a, b, c, d 中最大的是
- A、 a B、 b C、 c D、 d
3. “ $a \neq b$ 且 $b \neq c$ ”是“ $a \neq c$ ”成立的
- A、充要条件 B、充分不必要条件 C、必要不充分条件 D、既不充分也不必要条件
4. 已知 a, b, c, d 都是整数, 且 $x < 2b, b < 3c, c < 4d, d < 50$, 那么 a 的最大值
- A、1157 B、1167 C、1191 D、1199
5. 设 x, y 是任意两个正奇数, 且 $x > y$, 若 k 总能整除 $x^2 - y^2$, 则 k 的最大值是
- A、2 B、4 C、6 D、8
6. 若 $\lg|x| + |\tan x| = 0$, 则 x 的个数是
- A、0 B、1 C、2 D、3
7. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \frac{n - \sqrt{2004}}{n - \sqrt{2008}}$, 在此数列的前 50 项中, 最大项和最小项依次是
- A、第 1 项和第 50 项 B、第 50 项和第 1 项 C、第 45 项和第 44 项 D、第 44 项和第 45 项
8. 等比数列 $\frac{\pi}{3} + \sec \theta, \frac{\pi}{3} + \frac{\sec \theta}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{\sec \theta}{3}$ 的公比是
- A、 $1/6$ B、 $1/3$ C、 $1/2$ D、1
9. 已知函数 $f(x) = (x+1)^2$, 若存在实数 t , 使得 $f(x+1) \leq x$ 在 $x \in [1, m]$ 时成立, 则 m 的最大值是
- A、2 B、3 C、4 D、5
10. 已知集合 M 是满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体:
- 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 函数值为非负实数
- 对于任意 $s, t \in [0, +\infty)$, 橙子奥数工作室录入暗记, 都有 $f(s) + f(t) \leq f(s+t)$.
- 在函数 $f_1(x) = x, f_2(x) = 2^x - 1, f_3(x) = \ln(x+1)$ 中, 属于 M 的有
- A、 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ B、 $f_1(x)$ 和 $f_3(x)$ C、 $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ D、 $f_1(x), f_2(x)$ 和 $f_3(x)$

二、填空题

11. 若对于任何非零实数 a 和 b , 有 $f(ab) = f(a) + f(b)$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$. 构造一个满足前面条件的函数, 它的解析式是 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 直角坐标平面内横、纵坐标都是整数的点称为格点. 将半径为 2 的一个圆片平放在直角坐标系内, 让它随意移动, 它盖住的格点最多有_____个, 最少有_____个.

13. 生物小组的一位同学发现随着气温的升高, 蟋蟀每分钟的鸣叫次数也在逐渐增加. 他每隔 1°C 记录一次, 下面是其中的四组数据, 有两个已经模糊不清了, 但是他知道记录的数据成等差数列. 则表格中的数据 $A=$ _____, $B=$ _____.

鸣叫次数 (次/分)	8	29	B	89
温度 ($^{\circ}\text{C}$)	9	A	20	36

14. 设 $\{a_n\}$ 是集合, 橙子奥数工作室录入暗记, $\{2^s + 2^t + 2^r \mid 0 \leq s < t < r \text{ 且 } r, s, t \in N\}$ 中所有的数从小到大排成的数列, 则 $a_5 =$ _____, $a_{50} =$ _____.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 21, S_6 = 24$, 则公差 $d =$ _____, 数列 $\{|a_n|\}$ 的前 50 项的和是_____.

16. 直角坐标平面内直线 l 上所有的点构成的点集是 A , 将 A 中所有的点左移 4 个单位再下移 5 个单位后得点集 B , 若恰有集合 $A=B$, 直线 l 与 x 轴成锐角 θ , 则 $\tan \theta =$ _____.

17. n 个向量的和为零向量, 若其中一个向量的坐标为 $(3, 4)$, 则其余 $n-1$ 个向量的和的模是_____.

18. 已知函数 $f(x) = |x^2 + bx + c|$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 t , 当 b, c 变化时, t 的最小值是_____.

19. In a certain formula, p is directly proportional to s and inversely proportional to t . If $p = 2$ when $s = 15$ and $t = 2.5$, what is the value of p in terms of t and s ? Answer:_____.

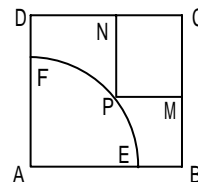
20. 一个小于 15 个正整数, 被 4 除余 2, 被 5 除余 1, 这个数是_____.

三、解答题

21. 已知数列: $\{a_n\}$ 中, $a_n = 2a_{n-1} + n$ (其中 n 是大于 1 的整数)

若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$\{a_n\}$ 能否为等比数列? 若可能, 求其通项公式; 若不能, 请说明理由.



22. 不等式 $(-2)^x a - 3^{x-1} - (-2)^x < 0$ 对于任意正整数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

23. 如图, 一块边长为 20cm 的正方形铁片 ABCD 已截去一个半径为 r cm ($r \in (0, 20]$) 的扇形 AEF ($1/4$ 个圆), 用剩下的部分截成一个矩形 PMCN, 怎样截可使此矩形的面积最大? 最大面积是多少?