

第十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第2试

(全国卷)

一、选择题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中 ($a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+$), $a_1 = 5$, $a_2 = b$, 则 $a_n \neq 0$ 的充要条件为
A、 $b \neq 0$ B、 $b \neq 4$ C、 $b \neq 0$ 或 $b \neq 4$ D、 $b \neq 0$ 且 $b \neq 4$
2. 对 1949° , 1966° , 2005° , 2008° 依次求余弦, 则余弦值最大的和最小的角依次是
A、 1949° 、 1966° B、 1966° 、 1949° C、 2008° 、 1966° D、 2005° 、 2008°
3. 下列函数中, 值域为 \mathbb{R}^+ 的是
A、 $y = 2^{-|x-1|}$ B、 $y = 3x+1$ ($x > 0$) C、 $y = x^2 + x + 2$ D、 $y = \frac{1}{x^2}$
4. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{8}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $P = \left\{x \mid x = \frac{k}{8} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则
A、 $M \cup N = P$ B、 $M \cap N = P$ C、 $M \cap P = N$ D、 $M \cap N = M$
5. 偶函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(-4) = f(1) = 0$, 且在区间 $[0, 3]$ 与 $[3, +\infty)$ 上分别递减和递增, 则不等式, 橙子奥数工作室录入暗记, $x^3 f(x) < 0$ 的解集为
A、 $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ B、 $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$ C、 $(-\infty, -4) \cup (-1, 0)$ D、 $(-\infty, -4) \cup (-1, 0) \cup (1, 4)$
6. 如果 $f(x) = \max\{\sin \alpha, \cos \alpha\}$ ($x \in \mathbb{R}$), 则下列命题正确的是
A、函数 $f(x)$ 的值域是 $[-1, 1]$ B、当且仅当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $f(x)$ 取得最大值
C、函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π D、当且仅当 $2k\pi + \pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $f(x) < 0$
7. Four people: A,B,C and D are accused in a trial. It is known that
if A is guilty, then B is guilty if B is guilty, then C is guilty or A is not guilty if D is not guilty, then A is guilty and C is not guilty if D is guilty, then B is not guilty
how many of the accused are guilty? Answer:
A、2 B、3 C、4 D、Insufficient information to determine
8. 已知 $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = -3x+5$, $F(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$, 则 $F(x)$ 的最大值是
A、1 B、2 C、4 D、3
9. 满足 $a^2 - 3b - 9 = 0$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) 且 $|b| < 1000$ 的数组 (a, b) 的个数是
A、57 B、54 C、37 D、109
10. 有“黄河源头第一县”之称的青海省洛藏自治州玛多县, 被称为“千湖之县”. 受连续干旱影响, 该县有数百个湖泊相继干涸, 且鼠害十分猖獗, 草原加速退化, 每年因鼠害造成的退化面积达 20%. 按照这样的退化速度, 自 2005 年起, 经过多少年, 草原退化面积将开始超过 2005 年草原面积的一半
A、3 年 B、4 年 C、5 年 D、6 年

二、填空题

11. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则从 A 到 A 的映射 f 有____个, 其中满足 $f(a) \geq a$ 的映射有____个.
12. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x+1$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 1$, 则 $f(\cos 2) =$ ____; 当 $x \in [0, 2\pi)$ 且满足 $\cos x + f(\sin x) > 1$ 的 x 的集合为____.

13. 一个三位数与它的各位数字和的比值为 p (例如对于三位数 462, $p = \frac{462}{4+6+2}$), 若三位数字的各位数字都不为 0, 则当 p 的值取得最小值时, 此三位数是____; 当 p 的值取得最大值时, 此三位数是____.

14. 函数, 橙子奥数工作室录入暗记, $y = 3x^2 - 6x + 2\sqrt{2x - x^2} + 4$ 的最大值为____, 最小值为____.

15. 如果 ABC 边上的点的坐标 (x, y) 在映射 $f: (x, y) \rightarrow (2x+2, 2y-5)$ 的作用下的象的集合所对应的图形是 $A'B'C'$, 已知 ABC 的面积为 6, 则 $A'B'C'$ 的面积等于____.

16. Let a and b be the two real roots of the quadratic equation $x^2 - (k-1)x + k^2 + 3k + 4 = 0$, where k is some real number. The largest possible value of $a^2 + b^2$ is ____.

17. 某校高一新生 784 人, 每班分配 56 人, 方法是: 将每人的入学成绩从高分到低分依次编号 (成绩相同的学生按姓氏笔画顺序), 然后按 S 形顺序编班. 例如: 若有 8 个班, 将编号 1 至 8 号分别编在 1 至 8 班, 9 至 16 号分别编在 8 至 1 班, 17 至 24 号编在 1 至 8 班, ..., 该校高一新生编号为 300 (每号只对 1 人) 的同学编在 ____ 班.

18. 函数 $y = x^2$ ($-2 \leq x \leq 2$) 与函数 $y = x + m$ 的图象恰有 1 个公共点在 y 轴的右侧, 则 m 的取值范围是 ____.

19. $\{a_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 55, 555, 但第 4 项不是 5555, 请写出一个适合题意的通项公式: $a_n =$ ____.

20. $M = \{x | 9^n, n = 1, 2, 3, \dots, 2005\}$, 已知 9^{2005} 是 1914 位数, 则在 M 中, 最高位是 9 的数共有 ____ 个.

三、解答题

21. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $BC = CD = DA = 2$, $\angle A = \theta$
求 BD 的长 (用 θ 表示);

设 $\triangle BCD$ 的面积为 S_1 , $\triangle BCD$ 的面积为 S_2 , $f(\theta) = S_1^2 + S_2^2$, 求函数 $f(\theta)$ 的值域.

22. 密码员王超设计了一种给自然数编码的方法

先将自然数表示成五进制 (逢 5 进 1)

再将五进制中的数码与集合 $\{V, W, X, Y, Z\}$ 中的元素建立一个一一对应

后来, 他发现三个递增的相邻的十进制自然数编成 VYZ, VYX, VVW , 求被编成 $VWXYZ$ 的数所对应的十进制数.

23. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1}$

当 $k = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;

若存在实数 a, b, c 使 $f(a) + f(b) < f(c)$, 试求实数 k 的取值范围.

(广西、山东、宁夏、海南卷)

一、选择题

1. 命题 $p: \emptyset \in \{\emptyset\}$; 命题 $q: \text{若 } A = \{1, 2\}, B = \{x | x \subseteq A\}$, 则 $A \in B$, 那么

A、 p 真, q 假 B、 p 真, q 假 C、 p 假, q 真 D、 p 真, q 假

2. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}, N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{8}, k \in \mathbb{Z}\right\}, P = \left\{x \mid x = \frac{k}{8} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则

A、 $M \cup N = P$ B、 $M \cap N = P$ C、 $M \cap P = N$ D、 $M \cap N = M$

3. 已知关于 x 的不等式 $\frac{6}{x-1} + ax + b > 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$, 则 $a + b =$

A、3 B、4 C、5 D、6

4. 下列函数中, 值域为 \mathbb{R}^+ 的是

A、 $y = 2^{-|x-1|}$ B、 $y = 3x + 1$ ($x > 0$) C、 $y = x^2 + x + 2$ D、 $y = \frac{1}{x^2}$

5. 偶函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(-4) = f(1) = 0$, 且在区间 $[0, 3]$ 与 $[3, +\infty]$ 上分别递减和递增, 则不等

式, 橙子奥数工作室录入暗记, $x^3 f(x) < 0$ 的解集为

A、 $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ B、 $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$ C、 $(-\infty, -4) \cup (-1, 0)$ D、 $(-\infty, -4) \cup (-1, 0) \cup (1, 4)$

6. 已知直线 l, m 与平面 α , 则 $l // m$ 的一个充要条件是

A、 l, m 与 α 等角 B、 $l \perp \alpha, m \perp \alpha$ C、 $l // \alpha, m // \alpha$ D、 $l \perp \alpha, m // \alpha$

7. Four people: A, B, C and D are accused in a trial. It is known that

if A is guilty, then B is guilty if B is guilty, then C is guilty or A is not guilty if D is not guilty, then A is guilty and C is not guilty if D is guilty, then B is not guilty

how many of the accused are guilty? Answer:

A、2 B、3 C、4 D、Insufficient information to determine

8. 已知 $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = 2^x, f_3(x) = -3x + 5, F(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$, 则 $F(x)$ 的最大值是

A、1 B、2 C、4 D、3

9. P 是四边形 ABCD 所在平面外一点, 若点 P 到四边形各边的距离相等, 则四边形 ABCD 是

A、正方形 B、菱形 C、梯形 D、两组对边之和相等的四边形

10. 可将空间分成 15 个部分的平面的个数至少是

A、3 B、4 C、5 D、6

二、填空题

11. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则从 A 到 A 的映射 f 有_____个, 其中满足 $f(a) \geq a$ 的映射有_____个.

12. 正四棱锥 P-ABCD 的侧棱长及底面边长均为 a , 点 M 是侧棱 PA 的中点, 点 N 是侧棱 PB 上的一个动点, 点 T 是底面 ABCD 内的一个动点, 则 $MN + NT$ 的最小值是_____.

13. 已知正四棱锥的底面积为 m , 侧面积为 n , 则它的体积等于_____.

14. 函数, 橙子奥数工作室录入暗记, $y = 3x^2 - 6x + 2\sqrt{2x - x^2} + 4$ 的最大值为_____, 最小值为_____.

15. 如果 ABC 边上的点的坐标 (x, y) 在映射 $f: (x, y) \rightarrow (2x + 2, 2y - 5)$ 的作用下的象的集合所对应的图形是 $A'B'C'$, 已知 ABC 的面积为 6, 则 $A'B'C'$ 的面积等于_____.

16. Let a and b be the two real roots of the quadratic equation $x^2 - (k-1)x + k^2 + 3k + 4 = 0$, where k is

some real number. The largest possible value of $a^2 + b^2$ is _____.

17. 已知半径为 5 的球的两个平行截面的面积分别为 9π 和 16π , 则这两个截面之间的距离为 _____.

18. 函数 $y = x^2$ ($-2 \leq x \leq 2$) 与函数 $y = x + m$ 的图象恰有 1 个公共点在 y 轴的右侧, 则 m 的取值范围是 _____.

19. 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是等腰梯形, 若 $AD = AB = AA_1$, $DC = 2AB_1$, 则异面直线 AD_1 与 CB_1 所成角的余弦值为 _____.

20. 某校高一新生 784 人, 每班分配 56 人, 方法是: 将每人的入学成绩从高分到低分依次编号 (成绩相同的学生按姓氏笔画顺序), 然后按 S 形顺序编班. 例如: 若有 8 个班, 将编号 1 至 8 号分别编在 1 至 8 班, 9 至 16 号分别编在 8 至 1 班, 17 至 24 号编在 1 至 8 班, ..., 该校高一新生编号为 300 (每号只对 1 人) 的同学编在 _____ 班.

三、解答题 (每题 10 分, 共 33 分)

21. 已知正四棱锥 $S - ABCD$ 中, $\angle ASB = 2\theta$, $AB = a$

求侧棱与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值

求此四棱锥的内切球的半径

22. 密码员王超设计了一种给自然数编码的方法

先将自然数表示成五进制 (逢 5 进 1)

再将五进制中的数码与集合 $\{V, W, X, Y, Z\}$ 中的元素建立一个一一对应

后来, 他发现三个递增的相邻的十进制自然数编成 VYZ, VYX, VVW , 求被编成 $VWXYZ$ 的数所对应的十进制数.

23. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1}$

当 $k = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;

若存在实数 a, b, c 使 $f(a) + f(b) < f(c)$, 试求实数 k 的取值范围.