

第十七届“希望杯”全国数学邀请赛

高一 第2试

一、选择题（每下题4分，共40分）

1. M 、 N 为两个非空实数集，定义： $M+N=\{p+q|p\in M, q\in N\}$ ，若 $M=\{2, 3, 5, 7\}$ ， $N=\{1, 2, 4, 8\}$ ，则 $M+N$ 的元素个数是

A、10 B、11 C、12 D、13

2. α 为第3象限角，则 $\frac{\alpha}{3}$ 不可能在

A、第1象限 B、第2象限 C、第3象限 D、第4象限

3. 下列函数中在 $(0, +\infty)$ 上递减的函数是

A、 $y=-(x-1)^2$ B、 $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}$ C、 $y=|x^2-1|$ D、 $y=2^{\frac{1}{x}}$

4. $a=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{5}}$ ， $b=(\frac{1}{5})^{\frac{1}{4}}$ ， $c=\frac{4\log_2 b}{5\log_2 a}$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系是

A、 $a < b < c$ B、 $b < a < c$ C、 $c < b < a$ D、 $b < c < a$

5. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，此抛物线的顶点为 C ，且 ABC 是等边三角形，则

b^2-4ac 的值为

A、9 B、12 C、16 D、不确定

6. a 、 b 、 c 均属于区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ ，且满足 $a=\cos a$ ， $b=\sin(\cos b)$ ， $c=\cos(\sin c)$ ，则

A、 $a < b < c$ B、 $a < c < b$ C、 $b < a < c$ D、 $b < c < a$

7. 某校组织学生参观 a 、 b 、 c 、 d 四个地方，规定：去 a 就不去 b ，去 b 就去 d ，去 c 就不去 d ，不去 c 就去 b 。那么下列叙述错误的是

A、不可能去 b 又去 c B、去 b 的人与去 d 的人相同 C、去 a 就去 c D、去 d 就去 a

8. The coefficient of the term x^{19} in the polynomial expansion of $(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x-19)(x+20)$ is

A、-210 B、10 C、20 D、210

9. 方程 $(x^2-x-1)^{3x^2+5x-2}=1$ 的整数解有几个

A、2 B、4 C、5 D、6

10. 方程 $a^x=\log_a x$ 的根有几个

A、1 B、0或1 C、0或1或2 D、0或1或2或多于2

二、填空题（每小题4分，共40分）

11. 若 $f(x)=x^3$ ，且约定 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ ， $\Delta^2 f(x)=\Delta[\Delta f(x)]$ ， $\Delta^3 f(x)=\Delta[\Delta^2 f(x)]$ ，……，则

$\Delta^4 f(x)=$ _____。

12. There are 15 students in a class. In a mathematics test they have scored an average of 94 marks. The maximum possible score of the test is 100 marks. Then the minimum possible score that any of these students could get is _____ marks.

13. $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ， $x=(\sin \alpha)^{\log_x \cos \alpha}$ ， $y=(\cos \alpha)^{\log_x \sin \alpha}$ ， $z=(\sin \alpha)^{\log_x \sin \alpha}$ ，则 x 、 y 、 z 的大小关系是_____。

14. $y=e^{x-1}$ 对应的图象为 F ，图象 F' 与 F 关于 $(-3, 2)$ 中心对称，则 F' 的函数表达式为_____。

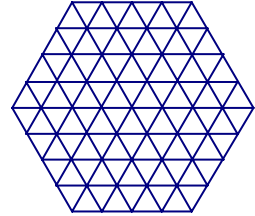
15. $A = \{ n | \frac{2^n + 3^n}{5} \in N, n \in N \}$, 将 A 中所有元素从小到大依次排列: a_1, a_2, a_3, \dots , 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m =$ _____ .

16. $f(x)$ 对于任意的实数 x, y 都满足 $f(x+y^2) = f(x) + 2[f(y)]^2$, $f(1) \neq 0$, 则 $f(2006) =$ _____ .

17. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, 则 $f^{-1}(x-1) > 3$ 的解集是 _____ .

18. $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 则 $f[f(x)] = x$ 的实数根是 _____ .

19. 如由图, 用边长是 1 的正三角形拼成正六边形, 六边形的边长是 n 时边长是 1 的三角形个数是 S_n , 则 $S_3 =$ _____, $S_n =$ _____ .



20. 以下 8 个数据: $a_1=3.57, a_2=3.61, a_3=3.65, a_4=3.71, a_5=3.79, a_6=3.82, a_7=3.86, a_8=3.99$, 它们的和为 30, 若整数 A_i ($1 \leq i \leq 8$) 的和仍是 30, 则“误差” $|A_i - a_i|$ 的最大值 M 的最小值为 _____ .

三、解答题 (第 21 题 10 分, 第 22、23 题各 15 分, 共 40 分)

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{a}x^2 - 2x - 6$ ($a > 0$) 在区间 $[-2, 3]$ 上最大值为 6, 最小值为 -3, 求 a, b 的值.

22. (1) 求证 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$.

(2) ABC 中, $A \geq B \geq C \geq 30^\circ$, 求 $\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 的最大值和最小值 .

23. 试确定所有正整数 k 使集合 $P = \{2006, 2006+1, 2006+2, \dots, 2006+k\}$ 分成 2 个不相交子集 A 和 B , 且 A 元素之和等于 B 中元素的和. (试题提供: 祖正石 录入: 成俊锋)