

第一届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题

1. 等差数列的第 p 项是 1990, 第 1990 项是 p , 那么第 $p+q$ ($q \geq 1991$) 项是
A. 正数 B. 负数 C. 零 D. 符号不能确定
2. 设 $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}$, 则
A. $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+2}$ B. $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$
C. $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$ D. $S_{k+1} = S_k - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$
3. 函数 $y = \sqrt{(2+x)(6-x)}$
A. 有最小值没有最大值 B. 有最大值没有最小值
C. 有最小值也有最大值 D. 没有最小值也没有最大值
4. a, b 都是实数, 那么 $|a+b| = |a| - |b|$ 是 $ab < 0$ 的
A. 充要条件 B. 充分不必要条件 C. 必要不充分条件 D. 不充分也不必要条件
5. $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in Z$), 那么 $\sec \alpha$ 与 $\sin 2\alpha \tan \frac{\alpha}{2}$ 的符号 (指正负号)
A. 总是相同 B. 总是相异
C. 在第一、三象限时, 它们同号, 在第二四象限时, 它们异号
D. 在第一、三象限时, 它们异号, 在第二四象限时, 它们同号
6. 正四面体内切球的体积是 1, 则它的外接球的体积是
A. 8 B. 27 C. 64 D. 4
7. 一个平面最多把空间分为两部分, 两个平面最多把空间分为四部分, 三个平面最多把空间分为八部分, 那么, 四个平面最多把空间分成
A. 16 部分 B. 14 部分 C. 15 部分 D. 20 部分
8. 设 $a = \arcsin(\sin \frac{1}{7}), b = \arccos(-\frac{1}{7}), c = \arcsin(-\frac{1}{7})$, 则
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$
9. 方程 $\arccot x + \arcsin x = \pi$ 的实数根的个数是
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
10. 在四个数 $\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2 \arctan(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 中, 与 $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ 数值相等的个数是
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

11. 方程 $\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$ 的解集是_____.

12. 与直线 $x+2y-3=0$ 关于直线 $x=a$ (a 为常数) 对称的直线的方程是_____.
13. 若平面内的动点 P 到定点 $F(1,0)$ 的距离比 P 点到 y 轴的距离多 1, 则动点 P 的轨迹方程是_____.
14. 函数 $y=2-3\sqrt{4x-x^2-3}$ ($x\in[1,2]$) 的反函数为 $y=f(x)$, 则 $f[f(-1)]=$ _____.
15. A, B, C 是三角形的三个内角, 那么 $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cos B \cos C =$ _____.
16. 坐标平面内有两个圆 $x^2 + y^2 = 16$ 和 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$, 这两个圆的内公切线的方程是_____.
17. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 在线段 AC 内, $CP=1$, 则直线 AD 和 C_1P 所成的角的弧度值是_____.
18. 不等式 $\sqrt{1-x^2} \geq x+t$ 的解集是空集, 则实数 t 的取值范围 (用区间形式) 是_____.
19. 数列 $\{a_n\}$ 中, 则 $a_1 = -1, a_2 = 2, a_{n+1} - a_n - a_{n+2} = 0$, 则数列的前 1990 项的和等于_____.
20. 若 $x, y > 0$, 且 $x+2y=1$, 则 $(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{4y})$ 的最小值是_____.