

第二届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题

1. 条件“ $AB \neq 0$ 或 $C = 0$ ”是直线 $Ax + By + C = 0$ 与两条坐标轴都有交点的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 以上都不对
2. 如果 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, 且 $0 < \theta < \pi$, 则 $\tan \theta$ 的值是
- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
3. 设集合 $P = \{x, 1\}$, $Q = \{y, 1, 2\}$, 其中 $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$, 且 $P \subseteq Q$. 将满足这些条件的每一个有序整数对 (x, y) 看作一个点, 这样的点的数目是
- A. 9 B. 14 C. 15 D. 21
4. 圆台上底面积为 1, 下底面积为 16, 用一个平行于底面的平面截这个圆台, 该平面到上底面的距离是它到下底面距离的 2 倍, 则这个截面的面积是
- A. 4 B. 9 C. $5/2$ D. $25/4$
5. 函数 $y = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$ 的值域是
- A. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ B. $(0, \frac{\pi}{2})$ C. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ D. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] \cup (0, \frac{\pi}{2})$
6. 函数 $f(x) = a \sin x + b$ 的最大值是 1, 最小值是 -7, 则 $b \sin^2 x - a \cos^2 x$ 的最大值是
- A. 5 或 4 B. 4 或 -5 C. 4 或 -3 D. 5 或 -3
7. 若 a 是大于 1 的常数, 则 $x^{\lg x} = a$ 的全部实根之积是
- A. 1 B. ± 1 C. $\lg^2 a$ D. $\pm \lg a$
8. 函数 $y = f(x)$ 有反函数, 把它的图象绕原点在两坐标轴所在平面内按逆时针方向旋转 90 度, 新的图象所表示的函数是
- A. $y = -f^{-1}(-x)$ B. $y = -f^{-1}(x)$ C. $y = f^{-1}(x)$ D. $y = f^{-1}(-x)$
9. 在半径为 1 的球体外面均匀地包上一层球壳形“外衣”, 若“外衣”的体积与球的体积相等, 则球壳“外衣”的厚度是
- A. $\sqrt[3]{3} - 1$ B. $\sqrt[3]{3}$ C. $\sqrt[3]{2}$ D. $\sqrt[3]{2} - 1$
10. 用一个圆台上、下底面都相交的平面截圆台, 所得的截面图形是
- A. 等腰梯形 B. 矩形 C. 等腰梯形或等腰三角形 D. 可能是曲边图形
11. 曲线 $C_1: x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$ 与曲线 $C_2: y = ax^2$ (a 是大于 0 的常数) 的交点个数是

A.2 B.4 C.6 D.不确定

12. 当 $n \geq 1000$ 时, $f(n) = n - 3$, 当 $n < 1000$ 时, $f(n) = f[f(n+7)]$, 则 $f(90)$ 的值是
A.997 B.998 C.999 D.1000

13. 底面半径为 1 的直圆柱被一个平面所截, 截面形状为椭圆, 该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 这个截面与圆柱底面所成的锐角是
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\arccos \frac{2}{3}$ D. $\arccos \frac{1}{3}$

14. $\log_x y + \log_y x$ 的取值范围是
A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$

15. $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1, f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ 设 $\omega = \sin f(\alpha, \beta, \gamma), t = f(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma)$
 $x = f(\alpha, \beta, \gamma), y = f(\arcsin \alpha, \arcsin \beta, \arcsin \gamma), z = \arcsin f(\alpha, \beta, \gamma)$, 则
A. $x > y > z > \omega > t$ B. $y > z > x > \omega > t$ C. $z > y > \omega > t > x$ D. $t > \omega > z > y > x$

二、填空题

16. 关于 x 的不等式 $\log_a x > 1 (a > 0, a \neq 1)$ 的解是_____.

17. 如果不等式 $x > \frac{a}{x}$ 的解集是正实数集, 那么实数 a 的取值范围是_____.

18. $\arcsin(\cos x) = \pi - x$, 则 $x =$ _____.

19. 在数列中 $\{a_n\}$, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \in N^+)$, 则数列中与 1991 最接近的那一项的数值是_____.

20. 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a , 公差为 d 的等差数列, 按下列加括号的方式分成群:

$(a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6, a_7), \dots$

各群所含的项的数目顺次成公比为 2 的等比数列, 试用 a, d, n 表示第 n 群各元素的和_____.

21. 与曲线 $x^2 - y^2 - 4mx + 4ny = 1 + 4n^2 - 4m^2$ 关于点 (m, n) 对称的曲线的轨迹方程是_____.

22. 由 $(-1, -1)$ 向曲线 $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y = 13 = 0$ 作切线, 切线方程是_____.

23. 木球浮在第一种液体中时, 球心与液面的距离为 2, 液面与球面相交形成一个圆, 当这只木球浮在第二种液体中时, 球心与液面的距离为 3, 液面与球面相交形成另一个圆。则这两个圆的面积差的绝对值是_____.

24. 函数 $f(x)$ 具有性质： $f(\log_{\frac{1}{2}} x) = 2x$ ，则数列 $\{f(n-1)\}, n \in N^+$ 的所有项之和是_____.

25. $f(x)$ 是奇函数，当 $x \geq 2$ 时，函数表达式为 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ ，则 $x \leq 3$ 时的函数的表达式是_____.

26. 函数 $y = 3x - 4\cos(\arcsin x), (-1 < x < 1)$ 的最小值是_____.

27. 由函数 $y = 2\sin 3x (\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6})$ 与函数 $y = 2 (x \in R)$ 的图象所围成的封闭图形的面积是_____.

28. $\log_x \sqrt{3} < 2$ 的解集 (区间) 是_____.

29. 方程的 $\arctan(\tan x) = \arctan(\cot x)$ 解集 (区间) 是_____.

30. 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$ ，则集合 $A = \{(x, y) | x\cos\theta + y\sin\theta - 1 = 0, x, y, \theta \in R\}$ 的补集是_____.