

第三届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题

1. 平面直角坐标系内有点 $A(\frac{3}{2}, -1), B(\lg 0.1, \cos(-\frac{\pi}{3}))$, 则线段 AB 的中点在
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 DD_1 上一点, F 为 B_1C_1 上一点, 则四面体 AA_1EF 的体积是
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{12}$
3. 已知 $0 < x < 1, 0 < y < 1, x \neq y$, 设 $a = \frac{x^2 + y^2}{2}, b = \frac{x + y}{2}, c = xy, d = \sqrt{xy}$, 则在 a, b, c, d 中一定是,
A. a 最大, d 最小 B. b 最大, c 最小 C. b 最大, d 最小 D. d 最大, a 最小
4. 若 $\sin \alpha + \sin \beta = 1$, 则 $\cos \alpha + \cos \beta$ 的最大值是
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
5. 关于 x, y 的方程 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 = 0$ 在平面直角坐标系中的图形是个圆, 当这个圆取最大面积时, 圆心的坐标是
A. $(0, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(1, -1)$ D. $(-1, 1)$
6. 设 $\alpha = \arccos \frac{1991}{1992}, \beta = \arccos \sqrt{\frac{1991}{1992}}, \gamma = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2000}}$, 则
A. $\beta < \gamma < \alpha$ B. $\gamma < \alpha < \beta$ C. $\gamma < \beta < \alpha$ D. $\alpha < \beta < \gamma$
7. 关于 x 的不等式 $(x^2 - 2) \log_{\frac{1}{5}} x > 0$ 的解集是
A. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ B. $(0, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. 空集
8. 三个不相同的实数 a, b, c 成等差数列, a, c, b 成等比数列, 则 $\frac{a}{b}$ 等于
A. -2 B. 2 C. -4 D. 4
9. 关于 x 的方程 $2a \sin x = 1 + a^2$ 有实数解, 那么实数 a 的取值范围是
A. 大于 -1 的实数 B. 大于 1 的实数 C. 大于 -1 且小于 1 的实数 D. -1 或 1
10. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1B_1 中点, N 为 BB_1 中点, 则异面直线 AM 与 CN

所成的角的余弦值等于

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

二、填空题

11. 若 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1991}{1992}$, 则自然数 $n =$ _____.

12. 不等式 $\sqrt{2x+4} > x+1$ 的解集是_____.

13. 方程 $3\cos x + 4\sin x = 6$ 的解集是_____.

14. $\sec \frac{1991\pi}{4}$ 与 $\sin \frac{323\pi}{4}$ 的等比中项是_____.

15. 点 $A(3, -2)$ 关于直线 $2x - y - 1 = 0$ 的对称点 B 的坐标是_____.

16. 棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体内任一点到四面体四个面的距离的和等于_____.

17. 从点 $(4, 3)$ 向圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 做切线, 则过两个切点的直线方程是_____.

18. 函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 R , 且 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x < 2\}$, $g(x) \geq 0$ 的解集

为空集, 则不等式 $f(x)g(x) > 0$ 的解集为_____.

19. 三角形 ABC 的三条边 a, b, c 成等差数列, 则角 B 的最大值是_____.

20. 定义在实数上的函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 3}$ 的最小值是_____.