

第四届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第一试

一、选择题

- 若 $\cos x, \sin x, 1$ 这三个数成等比数列, 则角 x 的终边在
A. 第 1 或第 2 象限 B. 第 2 或第 3 象限 C. 第 3 或第 4 象限 D. 第 1 或第 4 象限
- 以 a, b, c 分别表示 $2^{300}, 3^{200}, 6^{100}$, 那么
A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $a < b < c$
- [此题改为填空题] 设平面直角坐标系内的点 P 的坐标 (x, y) 使 $0, \log_2(1-y), \log_2(x+3)$ 成等差数列, 则的轨迹方程是_____.
- 四棱锥的个侧面与底面所成的二面角的大小都相同, 则这个棱锥的底面是
A. 圆内接四边形 B. 圆外切四边形 C. 菱形 D. 正方形
- 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 1$ 的交点的个数是
A. 1 B. 0 或 1 C. 0 D. 1 或 2
- 当 n 为任意自然数时, $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1}$ 的值
A. 恒小于 $\frac{1}{2}$ B. 不小于 $\frac{1}{2}$ C. 能够达到 1 D. 可以超过 1
- 若 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0 < \log_x 2 < \log_y 2$, 则
A. $0 < a < b < 1 < x < y$ B. $0 < b < a < 1 < y < x$
C. $1 < a < b < x < y$ D. $1 < b < a < y < x$
- 适合 $x^{1992} > 6^{3320}$ 的最小的自然数是
A. 19 B. 20 C. 21 D. 22
- 已知 $a < 0$, 则不等式 $\sqrt{a^2 - 2x^2} > x + \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的解集是
A. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a]$ B. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$ C. $[\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a]$ D. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$
- 设 $\theta \in R$ 且使 $3\sin\theta - \log_{\frac{1}{2}} x = 1$, 则 $\arctan \sqrt{\frac{1}{x}}$ 的值域是
A. $(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$ B. $[\arctan \frac{1}{4}, \arccos \sqrt{\frac{1}{5}}]$ C. $[\arccos \sqrt{\frac{1}{5}}, \arccos \sqrt{\frac{16}{17}}]$ D. $[\frac{1}{4}, 2]$

11. 设 $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, 则 $\arcsin[\sin(-\alpha)]$ 可以简化为

A. $-\alpha$ B. α C. $\pi - \alpha$ D. $\alpha - \pi$

12. 实数 x, y 适合方程 $x^2 + y^2 - 6x = 0$, 则 $\sqrt{2x^2 + y^2 - 4x + 5}$ 的值域是

A. $[\sqrt{5}, \sqrt{53}]$ B. $[5, 53]$ C. $[4, +\infty)$ D. $[5, \sqrt{53}]$

13. 设集合 $M = \{y | x - y^2 = 1, x, y \in R\}$, $N = \{y | x - y = 1, x, y \in R\}$ 则 $M \cap N$ 是

A. $\{(x, y) | (1, 0)\}$ B. $\{(x, y) | (2, 1)\}$ C. $\{(x, y) | (1, 0), (2, 1)\}$ D. R

14. 某球的大圆方程为 $x^2 + y^2 + x + y - \sin x \cos \alpha = 0$, 其中 $\alpha \in R$, 则此球的体积的取值范围是

A. $(0, \frac{\pi}{6}]$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\pi]$ C. $(0, \frac{4}{3}\pi)$ D. $(0, \frac{4}{3}\pi]$

15. 在曲线 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 上有横坐标依次为 $1, x, 4$ 三个点 A, B, C , $1 < x < 4$, 当三角形 ABC 的面积最大时, x 的值是

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 4 D. $\frac{5}{2}$

二、填空题

16. 若函数 $y = a \sin(bx + c)$, ($a \neq 0, b \neq 0, a, b, c$ 都是常数) , 则 y 的周期是_____.

17. 在已知圆内, $\sqrt{2}$ 弧度的圆心角所对的弦长是 $\sin \sqrt{2}$, 则该角所对的弧长是_____.

18. 若角 x 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上, 并且满足方程 $\frac{\sin 2x + \cos 2x}{1 - \sin^2 x - 2 \cos 2x}$, 则角 x 的值是_____.

19. 等差数列的 $S_{10} = 20, S_{20} = 60$, 则 S_{30} 的值是_____.

20. 点 P 在有向线段 AB 的反向延长线上, 设 $\frac{AP}{PB} = \lambda$, 则 λ 的取值范围是_____.

21. 对于任意的 $a \in R$, 曲线系 $ax^2 - 2xy - ax - y - 2a + 1 = 0$ 的所有曲线都经过两个定点, 这两个定点的坐标是_____.

22. 设 $\alpha = \arctan x, \beta = \arctan y, \tan(\alpha - \beta) = 1$, 则满足上述条件的有序整数对 (x, y) 的数目是_____.

23. 将正方体的中心同八个顶点相连, 得到八条连线, 以每条连线为棱, 得到若干个二面角, 每个二面角的大小是_____.

24. M 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < a)$ 上短轴端点以外的一点, M 与短轴两端的连线交 x

轴与 P, Q, O 是坐标原点, 则 $|OP \cdot OQ|$ 的值是_____.

25. 设 $\theta \in R$, 则函数 $f(\theta) = \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta$ 的值域是_____.

26. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{3}{8}, a_n = \frac{1}{8}a_n^2 + \frac{3}{8} (n \in N)$, 则从单调性来看, 这个数列是_____数列

27. 将 $\sin^4 \theta + \frac{\sin^4 2\theta}{4} + \frac{\sin^4 4\theta}{16} + \frac{\sin^4 8\theta}{64}$ 化简, 得到_____.

28. 点 P 的坐标 (x, y) 满足条件: $\arctan x - \arctan y = \frac{\pi}{2}$, 则点 P 的运动轨迹是_____.

29. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{x^2 + 4}$ 的最小值是_____.

30. F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < a)$ 的焦点, P 是椭圆上的一点, 且 $\angle F_1 P F_2$, 则的面积是_____.