

第五届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第二试

一、选择题

1. 互不相等的三个正数 a, b, c 依次成等比数列, 则 $\lg a, \lg b, \lg c$

- A. 成等比数列而不成等差数列 B. 成等比数列而不成等比数列
C. 既成等比数列也成等比数列 D. 既不成等比数列也不成等比数列

2. 已知 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, 设 $a = 2^{1-\sin x}, b = 2^{\cos x}, c = 2^{\tan x}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

3. 不等式 $\arccos x \leq \arccos(2x-1)$ 的一个解是

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

4. 如果函数 $f(x)$ 是奇函数, 那么 $f(x) - f(-x), f[f(x)], f^2(x), \sqrt{f(x)}$ 中一定是奇函数的个数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 记 $S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i$, 那么使 S_1, S_2, S_3 成等差数列的自然数 n 的值

- A. 不存在 B. 有且仅有 1 个 C. 有且仅有 2 个 D. 有无数多个

6. 直线 $y = kx - 1$ 与曲线 $y = -\sqrt{1 - (x-2)^2}$ 有交点, 则 k 的取值范围是

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 1/3]$ C. $[1/3, 1]$ D. $[0, 4/3]$

7. D, E 分别是正四面体 $V-ABC$ 中棱 AB, AC 的三等分点 $AD:DB = AE:EC = 2:1$,

则通过 D, E 且平行于 VA 的截面是

- A. 正方形 B. 矩形但不是菱形 C. 菱形但不是矩形 D. 平行四边形但不是矩形也不是菱形

8. 直线 $x = 6$ 与半抛物线 $y = \sqrt{6x}$ 交于 A 点, l 是过此抛物线焦点的直线, 以 x 轴为棱,

将坐标平面折成的 60° 二面角, 此时点 A 在另一个半平面内的射影 B 恰在直线 l 上, 则直线

l 的倾角是

- A. $\arctan \frac{2}{3}$ B. $\arctan(-\frac{2}{3})$ C. $\pi - \arctan \frac{2}{3}$ D. $\pi - \arccos \frac{2}{3}$

9. 设 $\alpha \in R$, 且 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2} (k \in Z)$, 则关于 x, y 的方程 $x^2 + (\sin^2 \alpha - 1) - 2x + 1 = 0$ 表示的曲线是

- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 两条直线

10. 已知曲线 $C: x^2 + \frac{(y-\sqrt{3})^2}{2} = 1$, 曲线 C' 与 C 关于直线 $y = x$ 对称, 那么 C 上的动点

与 C' 上的动点间的最短距离是

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}-2$ D. 0

二、A 组填空题

11. 一个平面与直圆柱面的交线是离心率为 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的椭圆, 则该平面与圆柱底面所成的二面角的锐角等于_____.

12. 已知曲线 $C: (y-2)^2 = 1-x$, 曲线 C' 与 C 关于点 $(-1, 1)$ 成中心对称, 则 C 与 C' 的交点个数是_____.

13. 当 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 时, 函数 $y = \tan x + \cot x$ 的最大值是_____.

14. 在 $3, \sqrt{5}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{5}}$ 三个数中, 最小的是_____.

15. 不等式 $\sqrt{2x+2} > x-1$ 的解集是_____.

16. 将圆 $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{5}{2} = 0$ 绕直线 $x = \frac{1}{2}$ 旋转 $\frac{\pi}{5}$ 弧度, 所得旋转体的表面积是_____.

17. 使关于 x 的方程 $\sin x = \log_{\frac{1}{2}}(2a^3 - 3)$ 有解的实数 a 的取值范围是_____.

18. 使 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} > \frac{995}{1994}$ 成立的最小的自然数是_____.

19. 与四面体的四个顶点等距离的平面的个数是_____.

20. 三角形的三个内角 A, B, C 依次成等差数列, $2A, 2B, 2C$ 的正割也成等差数列, 则 $\cos(2B - 2A)$ 的值等于_____.

三、B 组填空题

21. 函数 $y = -\sqrt{2x^2 - 4x}$ 的图象是 (用语言描述) _____.

22. 设 $f(x) = \frac{(\sqrt{2})^x - 1}{(\sqrt{2})^x + 1}$, 则适合 $f(n) > \frac{n}{n+1}$ 的最小的自然数是_____.

23. 方程 $x^{\lg^3 x - 5 \lg x} = 0.0001$ 的解集是_____.

24. 在平面直角坐标系内, 曲线 $\log_x y = \log_y x$ 与直线 $x - 2y + 1 = 0$ 的交点的个数是_____.

25. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \varphi > 0)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的_____条件.

26. 设三角形的三条边的长度分别是 $x, y, \sqrt{x^2 - xy + y^2}$, 则最大边与最小边的夹角等于

_____.

27. 已知 a, b 为不相等的正数, 且 $b = \frac{a+3}{a+1}$, 将 $\sqrt{3}, a, b, \frac{a+b}{2}$ 四个数按从小到大的顺序排列, 应是_____.

28. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 13, a_2 = 56$, 对所有自然数 n , 都有 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 则 $a_{1994} =$ _____.

29. 三棱锥的锥顶在半径为 6 的球的球心, 其余各顶点在球的表面上, 三棱锥的高为 3, 则此三棱锥体积的最大值是_____.

30. 球冠与它所在的球的面积之比为 1 : 8, 则球冠轴截面的弧所对的中心角等于_____.