

## 第六届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

### 一、选择题

1.  $|x| \leq 1$  是  $|x+1| \leq 2$  的

- A. 充分条件但不是必要条件 B. 必要条件但不是充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 设  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \arcsin x$ ,  $\beta = \arcsin(1-x)$ ,  $\gamma = \arccos(x-1)$ , 则

- A.  $\alpha < \beta < \gamma$  B.  $\alpha < \gamma < \beta$  C.  $\beta < \gamma < \alpha$  D.  $\beta < \alpha < \gamma$

3. 若  $a^{1995} < a^{1994} < a^{1996}$ , 则一定有

- A.  $a > 1$  B.  $a < -1$  C.  $-1 < a < 0$  D.  $0 < a < 1$

4. 使三条直线  $4x + y = 4$ ,  $mx + y = 0$ ,  $2x - 3my = 4$  不能围成三角形的  $m$  值最多有

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

5. (改编) 已知动点  $P(x, y)$  的坐标使  $2x - y, \sqrt{3xy}, x + 2y$  成等比数列, 则  $P$  点的轨迹方程是

- A.  $y = x$  B.  $y = -x$  C.  $y = |x|$  D.  $y = -|x|$

6. 在  $\arctan \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ ,  $\sin(\arcsin \frac{\pi}{3})$ ,  $\arcsin(\sin \frac{\pi}{3})$ ,  $\tan(\arctan \frac{\pi}{3})$  中, 值为  $\frac{\pi}{3}$  的有

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

7. 等差数列的首项为  $-5$ , 它的前 11 项的平均值为 5, 若从中抽去一项, 余下的 10 项的平均值为 4, 则抽去的是

- A.  $a_8$  B.  $a_9$  C.  $a_{10}$  D.  $a_{11}$

8. 设  $R$  中的集合:  $A = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$ ,  $B = \{x | (x+1)(x-1)(x-3) > 0\}$ , 则满足

$A \cup B = \{x | x > -1\}$ ,  $A \cap B = \{x | 3 < x \leq 4\}$  的实数  $a, b$  的值是

- A.  $a = 5, b = -4$  B.  $a = -4, b = -5$  C.  $a = -5, b = 4$  D.  $a = 4, b = -5$

9. 将直角坐标系平面内由三条直线  $y = 3$ ,  $y = -3x + 6$ ,  $y = 3 - \frac{3}{2}x$  所围成的三角形, 绕  $y$  轴

旋转  $\frac{2}{3}$  弧度所得到的几何体的体积是

- A.  $2\pi$  B.  $\pi$  C. 2 D. 1

10. 方程  $\cos(\pi \cos x) = 0$  的解集是

A.  $\{x|x=k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in Z\}$  B.  $\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in Z\}$

C.  $\{x|x=k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in Z\}$  D.  $\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in Z\}$

二、A组选择题

11. 若实数  $x, y$  满足方程  $x^2 + y^2 - x + 3y = 0$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 若  $f(x) = \log_a(x+1) + \log_a(3-x)$ ,  $(-1 < x < 3)$  的最小值是  $-2$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

13. 已知关于  $x$  的方程  $2\sin x = |a-1|$  有解, 则在  $a$  的取值范围内所有整数的和是\_\_\_\_\_.

14. 平行于直线  $3x + 4y - 2 = 0$ , 并且与它的距离为 1 个单位的直线的方程是\_\_\_\_\_.

15. 函数  $y = |\log_2|x+1||$  的递减区间是\_\_\_\_\_.

16. 点  $P$  在圆  $C_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ , 点  $Q$  在圆  $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ , 则  $|PQ|$  的最小值是\_\_\_\_\_.

17. 若  $3, \sin x + \cos x, \frac{1}{6}$  依次成等比数列,  $x \in [0, 2\pi]$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.

18. 已知  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 则  $\sin^2 \alpha + \sin^6 \alpha + \sin^8 \alpha =$ \_\_\_\_\_.

19. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$  的两个不等实根中有一个是正数, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

20. 过椭圆  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$  的下焦点, 且与圆  $x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{3}{2} = 0$  相切的直线的斜率  $k =$ \_\_\_\_\_.

三、B组选择题

21. 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \frac{4}{x})$  的值域是\_\_\_\_\_.

22. 动点  $P$  从棱长为  $a$  的正方体的一个顶点出发, 沿棱运动, 对于每一条棱, 点  $P$  最多经过一次, 则点  $P$  运动的最大距离是\_\_\_\_\_.

23. 设地球半径为  $R$ , 在离地面  $\frac{R}{4}$  的空中有一卫星, 卫星上的照相机可以拍摄到的地球表面的面积与地球表面积的比是\_\_\_\_\_.

24. 凸四边形  $ABCD$  中,  $AB = a, AC = b$ , 又三角形  $BCD$  为等边三角形, 则当该凸四边形的面积得到最大时,  $\angle BAC =$ \_\_\_\_\_.

25.  $a$  是正常数, 则以  $F_1(a, a), F_2(-a, -a)$  为焦点, 短轴长等于焦距的椭圆方程是\_\_\_\_\_.

26. 已知  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{3\pi}{2}$ , , 则在  $\cos \alpha$  与  $\sin \beta$  中较大的是\_\_\_\_\_.

27. 设等差数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的前项和分别为  $S_n$  和  $T_n$  , 并且  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+2}{3n+4}$  对于一切  $n$  都成立 ,

则  $\frac{a_{12}}{b_{12}} =$ \_\_\_\_\_.

28. 方程  $\arccos |x| = \arcsin 2x$  的解是\_\_\_\_\_.

29. 已知三角形  $ABC$  的两顶点的坐标为  $B(0, a)$  和  $C(0, -a)$  , 直线  $AB$  与  $AC$  的斜率之积为  $m(m \in R)$  定值 , 则顶点  $A$  组成的曲线是\_\_\_\_\_.

30. 直角坐标平面上的点集  $M = \{(x, y) \mid \begin{matrix} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 \leq 0 \\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 0 \end{matrix} x, y \in R\}$  , 则  $M$  对应的图形的面积是\_\_\_\_\_.