

第七届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题

1. 以下四个函数中, 在区间上 $(-\infty, 0)$ 是减函数的是

A. $f(x) = \arccot(-x)$ D. $g(x) = \log_{0.5} x$ C. $q(x) = -2^{-x}$ D. $r(x) = -x^{\frac{1}{5}}$

2. 当 $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ 时, 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的值域是

A. $[2, 3\frac{1}{3}]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[3\frac{1}{3}, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

3. 已知不等式 $|x-a| + |x-3| < 1$ 的解集是空集, 则实数 a 的取值范围是

A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

4. 函数 $y = \csc x \cos 3x - \csc x \cos 5x$ 的最小正周期是

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

5. 点 $M(x_0, y_0)$ 是圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 内圆心以外的一点, 则直线 $x_0x + y_0y = r^2$ 与该圆的位置关系是

A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 相切或相交

6. 已知 $a, b \in R^+$, 则“ $x+y > a+b$ 且 $xy > ab$ ”是“ $x > a$ 且 $y > b$ ”的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x) = \arccos x + \frac{1}{2} \arccot x$ 的值域是

A. $(0, \pi)$ B. $(0, \frac{\pi}{2})$ C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}]$

8. 已知圆台的母线长是上、下底面半径长的等差中项, 侧面积 $S = 8\pi$, 则母线的长是

A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

9. 集合 $M = \{(x, y) | \arctan x + \arctan y = \pi\}$, $N = \{(x, y) | \sec^2 x + \csc^2 y = \pi\}$, 则

A. $M = N$ B. $M \subset N$ C. $N \subset M$ D. 以上都不对

10. 圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上任一点 $P(x, y)$ 都满足 $x+y+c \geq 0$, 则 c 的取值范围是

A. $(-\infty, 0]$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $[\sqrt{2}-1, +\infty)$ D. $[1-\sqrt{2}, +\infty)$

二、A组填空题

11. 不等式 $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x - 1$ 的解集是_____.

12. 圆 $x^2 + y^2 - 2ax \cos \theta - 2by \sin \theta - a^2 \sin^2 \theta = 0$ 在 x 轴上截得的弦的长是_____.
13. α 是 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ 的最小正根, 则 $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos 8\alpha$ 的值等于_____.
14. 先将函数 $f(x) = \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的图象作关于原点的对称变换, 然后向右平移 1 个单位, 再作关于 $y = x$ 的对称变换, 则此时的图象所对应的函数的解析式是_____.
15. 若 $\cot x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 则 $\cos 2(x + \frac{\pi}{4})$ 的值是_____.
16. 等差数列 $\{a_n\}$ 的项数 m 是奇数, 并且 $a_1 + a_3 + \dots + a_m = 44$, $a_2 + a_4 + \dots + a_{m-1} = 33$ 则 $m =$ _____.
17. 梯形 A_1BA_2C 中 $\angle CA_1B = \angle A_1BA_2 = 90^\circ$, $A_1C = CA_2$, $5A_1B = 4A_1C$, M 是 A_1B 的中点, N 是 BA_2 上的动点, 将三角形 A_1CM 沿 MC 折起, 将三角形 CNA_2 沿 CN 折起, 使 A_1 和 A_2 重合为 A 点, 则 AC 和平面 CMN 所成的最大角的正切值是_____.
18. 二次函数 $f(x)$ 的二次项系数是负数, 对任何 $x \in R$, 都有 $f(x-3) = f(1-x)$, 设 $M = f(\arcsin(\sin 4))$, $N = f(\arccos(\cos 4))$, 则 M 和 N 的大小关系是_____.
19. F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上任意一点, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的最小值是_____.
20. 已知点 $A \in \{(x, y) | y = \sqrt{3}x, x > 0\}$, 点 $B \in \{(x, y) | y = -\sqrt{3}x, x > 0\}$, $|AB| = l$ (定值), O 是直角坐标原点, 则三角形 OAB 的面积的最大值是_____.
- 三、B 组填空题
21. 数列 $\{8n+1, n \in N^+\}$ 的前 m 项中, 恰有 10 项的值是平方数, 则 m 的值最小是_____.
22. 一个棱锥的全面积和底面积的比是 m , 且各侧面与底面所成的角相等, 则侧面与底面所成的角是_____.
23. 已知 $x \geq 1$, 则动点 $A(x + \frac{1}{x}, x - \frac{1}{x})$ 与点 $B(1, 0)$ 的距离的最小值是_____.
24. 在三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, 两条中线 AD, CE 互相垂直, 则 $\angle B =$ _____.
25. 关于 x 的方程 $\sqrt{(x^2 - 4x + 3)^2} = px$ 有 4 个不同的实数根, 则 p 的取值范围是_____.