

## 第八届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

### 一、选择题

1. 下列说法中，正确的是：

A.  $y = x^{-\frac{2}{3}}$  是图象经过原点的偶函数

B.  $y = \sqrt{1-x^2}$  的图象是单位圆在第一象限内的部分

C.  $y = \arcsin x$  的图象关于原点对称并且与  $y = x$  的图象有三个交点

D.  $y = \log_{\frac{1}{2}} |x-1|$  的图象关于  $x=1$  对称且经过原点

2. 在以下四对不等式中，解集相同的是

A.  $x^2 - 3x + 2 > 0$  和  $\sqrt{1-x} > 0$     B.  $\sin x > \frac{1}{2}$  和  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

C.  $e^x < 1$  和  $\arcsin x < 0$                 D.  $|\log_2 x| > 1$  和  $|\log_{\frac{1}{2}} x| > 1$

3. 函数  $y = \sin x \cos x + \cos x + \sin x + 1$  的值域是

A.  $[0, +\infty)$     B.  $(0, +\infty)$     C.  $[\frac{3}{2} - \sqrt{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2}]$     D.  $[0, \frac{3}{2} + \sqrt{2}]$

4. 在二面角  $\alpha - l - \beta$  的两个面  $\alpha, \beta$  内，分别有直线  $a, b$ ，它们与棱  $l$  都不垂直，则

A. 当该二面角是直二面角时，可能  $a \parallel b$ ，也可能  $a \perp b$

B. 当该二面角是直二面角时，可能  $a \parallel b$ ，但不可能  $a \perp b$

C. 当该二面角不是直二面角时，可能  $a \parallel b$ ，但不可能  $a \perp b$

D. 当该二面角不是直二面角时，不可能有  $a \parallel b$ ，但可能  $a \perp b$

5. 不等式  $\arcsin(x-1) < x$  的解是

A.  $[0, 1]$     B.  $[1, 2]$     C.  $[0, 2]$     D.  $[0, +\infty)$

6. 在以下给出的数列中，是等差数列的为

A. 前  $n$  项的和  $S_n = n^2 - n + 2$     B. 前  $n$  项的是  $\log_2 \sin^{n-1} \frac{\pi}{6}$

C. 第  $n$  项是  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$     D. 由两某个等差数列对应项的乘积构成的数列

7. 对于边长是  $a, b, c$  (对角依次是  $A, B, C$ )，且  $\angle C$  是钝角的三角形  $ABC$  和直线

$l: ax+by+c=0$  , 给出下列 4 个假设 :

(1)  $l$  是倾斜角是钝角 (2)  $l$  是不穿过第一象限 (3)  $l$  和单位圆相切 (4)  $l$  过定点.  
其中正确的个数是 :

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 圆  $x^2+y^2+2x+4y-3=0$  上到直线  $x+y+1=0$  的距离等于  $\sqrt{2}$  的点有

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

9. 圆锥曲线  $C$  的准线是  $x=-3$  , 相应的焦点是  $F(1,0)$  , 如果  $C$  过定点  $M(5,2)$  , 那么  $C$  是

A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 类型不定

10. 设  $a = f\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{2}\right), b = f(\sqrt{\sin\theta \cos\theta}), c = f\left(\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\right)$  其中

$f(x) = \log_{\sin\theta} x, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  , 那么

A.  $a \leq c \leq b$  B.  $b \leq c \leq a$  C.  $c \leq b \leq a$  D.  $a \leq b \leq c$

二、A 组填空题

11. 设  $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{1996 \times 1997}$  , 则 1 与  $S$  的差是\_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x) = x^{\lg(\arctan 2)}$  在区间上  $(0, +\infty)$  的单调性是\_\_\_\_\_.

13. 在体积相等的正方体、球、等边圆锥这三个几何体中, 表面积最大的是\_\_\_\_\_.

14. 过圆  $x^2+y^2-4x+2y=0$  的圆心, 并且和点  $A(-1,-2)$ 、 $B(5,3)$  距离相等的直线  $l$  的方程是\_\_\_\_\_.

15. “希望杯”全国数学邀请赛从 1990 年开始举办, 当年参赛人数约 10 万人, 到 1996 年参赛人数已超过 60 万人, 如果每年的参赛人数按相同的增长率增加, 那么估计 1997 年参赛人数至少\_\_\_\_\_万人. (保留小数点后 1 位,  $\sqrt[6]{5} \approx 1.308, \sqrt[6]{6} \approx 1.348, \sqrt[6]{7} \approx 1.383$ )

16. 已知常数  $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$  , 则不等式  $(\tan \theta)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > (\cot \theta)^{x-8}$  的解集是\_\_\_\_\_.

17. 函数  $y = \log_2(x^2 - x + \frac{1}{2})$  以方程  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  的解集为定义域, 则  $y$  的值域是\_\_\_\_\_.

18. 方程  $2^{x-1} + 2x^2 - \frac{3}{5} = 0$  的实根的个数是\_\_\_\_\_.

19. 如果  $a+b+c=1$  , 那么  $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$  的最大值是\_\_\_\_\_.

20.  $f(x)$  是定义域  $R$  上的偶函数, 且  $f(1+x) = f(1-x)$  , 当  $-1 \leq x \leq 0$  时,  $f(x) = -\frac{1}{2}x$

则  $f(8.6) =$ \_\_\_\_\_.

三、B 组填空题

21. 球  $O$  的半径为 1, 点  $A, B, C$  在球面上,  $A$  与  $B$ 、 $A$  与  $C$  的球面距离都是  $\frac{\pi}{2}$ ,  $B$  与  $C$  的球面距离为  $\frac{2\pi}{3}$ , 则球  $O$  在二面角  $B-OA-C$  内的部分的体积是\_\_\_\_; 表面积是\_\_\_\_.

22. 若椭圆长轴、短轴、焦距的长度之和等于 8, 则长半轴的取值范围是\_\_\_\_, 当长半轴取得最小值时, 椭圆的离心率等于\_\_\_\_.

23.  $x, y$  是实数, 且  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 则  $x + y + xy$  的最大值是\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_.

24.  $\log_{\cos x} \sin x$  与  $\log_{\sin x} \cos x$  的大小关系是\_\_\_\_.

25. 动直线  $l$  垂直与  $x$  轴, 且与双曲线  $x^2 - 2y^2 = 4$  交于  $A, B$  两点,  $P$  是  $l$  上满足  $|PA| \times |PB| = 1$  的点, 那么  $P$  点的轨迹方程是\_\_\_\_.