

## 第九届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题（每小题6分）

1、直线  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$  的倾斜角是

- (A)  $\arctan \frac{2}{3}$  (B)  $\arctan(-\frac{2}{3})$  (C)  $\pi + \arctan \frac{2}{3}$  (D)  $\pi + \arctan(-\frac{2}{3})$

2、函数  $y = \arccos(\frac{1}{2} - x^2)$  的值域是

- (A)  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$  (B)  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$  (C)  $[\frac{\pi}{6}, \pi]$  (D)  $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

3、以  $T_1, T_2, T_3$  分别表示函数  $\tan \frac{x}{\sqrt{2}}, |\cos x|, \sin \frac{x}{3} (\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3})$  的最小正周期，那么

- (A)  $T_1 < T_2 < T_3$  (B)  $T_3 < T_2 < T_1$  (C)  $T_2 < T_1 < T_3$  (D)  $T_2 < T_3 < T_1$

4、不等式  $|\sqrt{3x-2} - 3| > 1$  的解集是

- (A)  $[2/3, 2)$  (B)  $(6, +\infty)$  (C)  $(6, +\infty) \cup (-\infty, 2)$  (D)  $(-\infty, 2)$

5、已知函数 (1)  $\arcsin(2x)$ , (2)  $\sin(\pi x) + \cos(\pi x)$  (3)  $\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$  其中，在区间

$[1/2, 1]$  上单调的函数是

- (A) (1)(2)(3) (B) (2)(3) (C) (1)(2) (D) (1)(3)

6、使不等式  $\sqrt{3} + \sqrt{8} > 1 + \sqrt{a}$  成立的正整数  $a$  的最大值是

- (A) 13 (B) 12 (C) 11 (D) 10

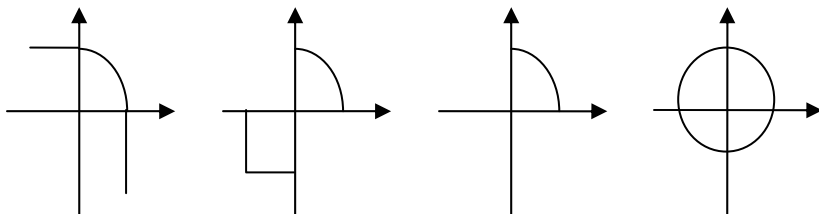
7、有以下几个数列：(1)  $a_n = \sqrt{3n-1}$  (2)  $S_n = n(2-3n)$  (3)  $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}$  (4)

$a_n = \frac{1}{n}$  (5)  $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$  (6)  $a_n = \frac{1}{n} \log_2 6^n$  其中是等差数列的有

- (A) (1)(3) (B) (2)(4) (C) (3)(5) (D) (2)(6)

8、在平面直角坐标系内，方程  $x^2 + y^2 + x|x| + y|y| - 2 = 0$  表示的曲线是

- (A) (B) (C) (D)



9、 $P$  是椭圆上任意一点， $F_1, F_2$  是椭圆的焦点，离心率  $e = \frac{1}{2}$ ，则  $F_1 P F_2$  的最大值是

(A) 60 度 (B) 90 度 (C) 120 度 (D) 135 度

10、若  $0 < a, b, c < 1$  , 并且  $a + b + c = 2$  则  $a^2 + b^2 + c^2$  的取值范围是

(A)  $[4/3, +\infty)$  (B)  $[4/3, 2]$  (C)  $[4/3, 2)$  (D)  $(4/3, 2)$

二、A 组填空题 (每小题 6 分)

11、不等式  $\log_{\sin 2x} 2x > \log_{\sin x} x^2$  在区间  $(0, 2\pi)$  上的解是\_\_\_\_\_.

12、当  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$  时,  $\arccos(\sin \alpha)$  的值等于\_\_\_\_\_.

13、若圆锥的侧面积为  $m$ , 全面积为  $n$ , 则圆锥的高与母线的夹角  $\theta$  的大小等于\_\_\_\_\_.

14、在  $2^{1998}$  的约数中, 大于 1949 的所有约数的和等于\_\_\_\_\_.

15、实数  $x, y$  适合条件  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  , 则函数  $2x^2 + 3xy + 2y^2$  的值域是\_\_\_\_\_.

16、函数  $\sin^3 x \sin 3x$  的最大值是\_\_\_\_\_.

17、若实数  $x, y$  适合方程  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  , 那么代数式  $\frac{y}{x+2}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

18、实数  $x, y$  适合方程  $4x^2 - 2xy^2 + 2xy - y^3 = 0$  , 则点  $(x, y)$  在平面直角坐标系内的轨迹是\_\_\_\_\_.

19、直线  $y = kx$  交曲线  $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$  于点  $P, Q$  两点,  $O$  是坐标原点,  $P$  在  $O, Q$  之间, 若  $|OP| = 2|PQ|$ , 那么  $k =$ \_\_\_\_\_.

20、正方体与其外接球的体积之比是

三、B 组填空题 (每小题 6 分)

21、数列  $\{a_n\}$  中, 前  $n$  项的和  $S_n = n^2 + 1$  , 则  $a_n =$ \_\_\_\_\_.

22、双曲线  $xy = 1$  的焦点坐标是\_\_\_\_\_, 准线方程是\_\_\_\_\_.

23、无穷等比数列  $\{a_n\}$  的首项为 1, 公比大于 0, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n+2}}{S_n}$  的值等于\_\_\_\_\_.

24、当  $m \in N$  , 若方程  $mx^2 + 2(2m-1)x + 4m - 7 = 0$  至少有一个整数根, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

25、设  $\alpha, \beta$  分别是方程  $\log_2 x + x - 3 = 0$  和  $2^x + x - 3 = 0$  的根, 则

$\alpha + \beta =$ \_\_\_\_\_,  $\log_2 \alpha + 2^\beta =$ \_\_\_\_\_.