

## 第十届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题（每小题6分）

1、 $\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3} + \operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}) + \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{3}) =$

- (A) 0 (B)  $\pi$  (C)  $2\pi$  (D)  $-\pi$

2、若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = -\frac{1}{2}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}} =$

- (A) -1 (B) 1 (C)  $-\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{4}{15}$

3、某等差数列共 $2n+1$ 项，其中奇数项的和为95，偶数项的和为90，则第 $n+1$ 项的和是：

- (A) 7 (B) 5 (C) 4 (D) 2

4、若点 $M(a, 1/b)$ 和点 $N(b, 1/c)$ 都在直线 $l: x + y = 1$ 上，则点 $P(c, 1/a)$ 和点 $Q(1/c, b)$

- (A) 都在 $l$ 上 (B) 都不在 $l$ 上 (C) 点 $P$ 在 $l$ 上,点 $Q$ 不在 $l$ 上 (D) 点 $Q$ 在 $l$ 上,点 $P$ 不在 $l$ 上

5、不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}-x) < 2$ 的解集是( )

- (A)  $[-1, \frac{5}{4})$  (B)  $(-1, \frac{5}{4})$  (C)  $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$  (D)  $[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

6、双曲线 $y = k/x$  ( $k > 0$ ) 的离心率用 $e = f(k)$ 来表示，则 $f(k)$

- (A) 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 (B) 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数  
(C) 在 $(0, 1)$ 上是增函数，在 $(1, +\infty)$ 上是减函数 (D) 是常数

7、当 $a, b$ 均为有理数时，称点 $P(a, b)$ 为有理点，又设 $A(\sqrt{1998}, 0)$ ， $B(0, \sqrt{2000})$

则直线 $AB$ 上有理点的个数是

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 无穷多个

8、方程 $\lg x = \sin x$ 的根的个数是

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

9、河中的船在甲、乙两地往返一次的平均速度是 $V$ ，它在静水中的速度是 $u$ ，河水的速度是 $v$  ( $u > v > 0$ )，则

- (A)  $V = u$  (B)  $V > u$  (C)  $u > V$  (D)  $V$ 和 $u$ 的大小关系不确定

10、设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ ，且 $f(a) = 1$ ， $f(b) = -5$ ，则 $a + b =$

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

二、A组填空题（每小题6分）

11、 $F_1, F_2$ 是椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点，点 $P$ 在椭圆上，且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，则的 $\triangle F_1PF_2$

面积是\_\_\_\_\_。

12、已知函数 $y = 9^{-x^2+x-1} - 2 \cdot 3^{-x^2+x+1}$ 的图象与直线 $y = m$ 的交点在平面直角坐标系的右半

平面内, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

13、已知函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} [ax^2 + 2x + (a-1)]$  的值域是  $[0, +\infty)$ , 则参数  $a$  的值是\_\_\_\_\_.

14、设圆  $C$  经过点  $M(-2, 0)$  和  $N(9, 0)$ , 直线  $l$  过坐标原点, 圆  $C$  和  $l$  的交弦为  $PQ$ , 当  $l$  绕坐标原点旋转时, 弦  $PQ$  长度的最小值是\_\_\_\_\_.

15、已知等比数列  $\{a_n = a_1 q^{n-1}, q \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$  中, 对某个  $n > 6$  有  $a_1 + a_n = 1094, a_2 a_{n-1} = \frac{2187}{4}$ , 则  $a_3 + a_{n-2} =$ \_\_\_\_\_.

16、 $M$  是圆  $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$  上的动点,  $O$  是原点,  $N$  是射线  $OM$  上的点, 若  $|OM| \cdot |ON| = 150$ , 则  $N$  点的轨迹方程是\_\_\_\_\_.

17、在正四棱锥  $O-ABCD$  中,  $\angle AOB = 30^\circ$ , 面  $OAB$  和面  $OBC$  所成的二面角的大小是  $\theta$ , 且  $\cos \theta = a\sqrt{b} - c$ , 其中  $a, b, c$  是自然数, 且  $b$  不被任何质数平方整除, 则  $a + b + c =$ \_\_\_\_\_.

18、过点  $P(1, 1)$  且与坐标轴围成面积为 2 的三角形的直线的条数是\_\_\_\_\_.

19、某渔场的最大养殖量是 100 吨鱼, 为保证鱼群的生长空间, 实际养殖量应当比 100 吨少, 以留出适当的空闲量, 已知鱼群的年增长量与实际养殖量和空闲率的乘积成正比, 比例系数为  $\frac{3}{2}$ , 则鱼群年增长量的最大值等于\_\_\_\_\_.

20、设  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 + x + 1 = 0$  的根,  $y = \frac{x_1}{x_2}$  则和式  $y + y^2 + y^3 + \dots + y^{1998}$  的值等于\_\_\_\_\_.

三、B 组填空题 (每小题 6 分)

21、已知实数  $x, y$  满足方程  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ , 则  $\frac{y-1}{x-2}$  的最小值是 \_\_\_\_\_,  $2x - y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

22、函数  $f(x) = \cos(2 \arccos x) + 4 \arcsin(\sin \frac{x}{2})$  的定义域是 \_\_\_\_\_, 值域是 \_\_\_\_\_.

23、若函数  $f(x) = (\log_2 \frac{x}{2})(\log_2 \frac{x}{4})$  的定义域是不等式  $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 7 \log_{\frac{1}{2}} x + 3 \leq 0$  的解集, 则  $f(x)$  的最小值是 \_\_\_\_\_, 最大值是 \_\_\_\_\_.

24、 $(1)\{2^{a_n}\}$  是等比数列  $(2)$  前  $n$  项和  $S_n = n^2 - 1(3)a_k = \frac{2}{k-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}), k \geq 2$ , 且各项都是正数. 以上能使  $a_n$  是等差数列的是 \_\_\_\_\_.

25、已知平面直角坐标系内的点  $A(2, 2)$  和  $B(4, -1)$ , 又点  $P$  在椭圆  $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ , 则  $\triangle PAB$  的面积的最小值是 \_\_\_\_\_, 这时  $P$  点的坐标是 \_\_\_\_\_.