

第十一届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题（每小题6分，共60分）

1、直线 a, b 分别过点 $P(-2, -2), Q(1, 3)$ ，它们分别绕点 P 和 Q 旋转，但保持平行，那么，它们之间的距离 d 的取值范围是（ ）。

(A) $(0, \sqrt{34}]$ ； (B) $(0, +\infty)$ ； (C) $(\sqrt{34}, +\infty)$ ； (D) $[\sqrt{34}, +\infty)$ 。

2、等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = -27$ ， $a_6 + a_7 + \dots + a_{10} = 3$ ，则

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ()$ 。

(A) -30 ； (B) 30 ； (C) $243/10$ ； (D) $-243/10$ 。

3、正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中， E, F 分别是 AB, BB' 的中点，则 $A'E$ 和 $C'F$ 所成的角是（ ）。

(A) $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{5}$ ； (B) $\arccos \frac{3}{5}$ ； (C) $\frac{\pi}{4}$ ； (D) $\frac{\pi}{3}$ 。

4、圆锥的侧面展开图是半径为1，圆心角 $\frac{3\pi}{2}$ 为的扇形，则过圆锥顶点的截面面积的最大值是（ ）。

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ； (B) $\frac{1}{2}$ ； (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ； (D) $\frac{3\sqrt{7}}{6}$ 。

5、If the line $x + \sqrt{3}y + a = 0$ and the circle $x^2 + y^2 = 1$ have two different intersections (交点) in the third quadrant (象限), then the interval (范围) of the real a is ()。

(A) $(-2, -1)$ ； (B) $(-2, -\sqrt{3})$ ； (C) $(1, 2)$ ； (D) $(\sqrt{3}, 2)$ 。

6、使不等式 $2^x - a > \arccos x$ 的解是 $-\frac{1}{2} < x \leq 1$ 的实数 a 的取值范围是（ ）。

(A) $1 - \frac{\pi}{2}$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\pi}{3}$; (C) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\pi}{6}$; (D) $\frac{1}{2} - \pi$ 。

7、设 $a > b > c, n \in \mathbb{N}$ ，且 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{n}{a-c}$ 恒成立，则 n 的最大值为 ()。

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5。

8、过椭圆的左焦点 F 作直线交椭圆于 A, B 两点，若 $|AF| : |BF| = 2 : 3$ ，且直线与长轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则椭圆的离心率为 ()。

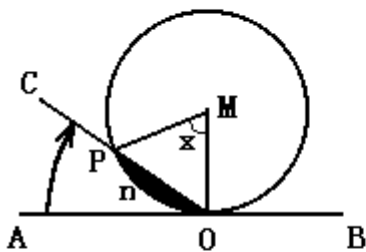
(A) $1/5$; (B) $\sqrt{2}/5$; (C) $\sqrt{3}/5$; (D) $2/5$ 。

9、设函数 $f(x) = (x-1)^2 + n (x \in \mathbb{N})$ 的最小值为 a_n ，最大值为 b_n ，记 $C_n = b_n^2 - 2a_n$ ，则数列 $\{C_n\}$ ()。

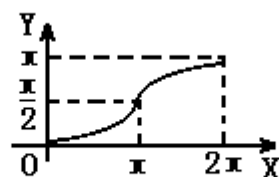
(A) 是公差为零的等差数列; (B) 是公比不为 1 的等比数列;

(C) 是常数数列; (D) 不是等差数列也不是等比数列。

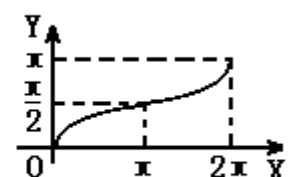
10、如图，半径为 1 的圆 M 切直线 AB 于 O 点，射线 OC 从 OA 出发，绕着 O 点，顺时针方向旋转到 OB ，旋转过程中 OC 交 M 于 P ，记 $\angle PMO$ 为 x ，弓形 PnO 的面积 $S = f(x)$ ，那么 $f(x)$ 的图象是 ()。



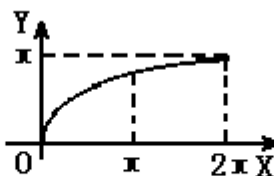
题一10图



(A)



(B)



(C)



(D)

二、A组填空题 (每题 6 分, 共 60 分)

11、已知 $0 < a < b, x = \sqrt{a+b} - \sqrt{b}, y = \sqrt{b} - \sqrt{b-a}$, 则 x, y 的大小关系是_____。

12、 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = P$, 则该数列前 $2n+1$ 项的和是_____。

13、如果任意实数 x 均使 $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x + \frac{13}{4}} \geq \frac{\pi}{3} - a$ 成立, 则 a 的取值范围是_____。

14、 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ |x| & |x| > 1 \end{cases}$, if the equation $f(x) = a$ has one and only one real root (实根) , then $a =$ _____。

15、若不等式 $\sqrt{3x-k} > \sqrt{x-4}$ 的解集为 $\{x | x \geq 4\}$, 则整数 k 的最大值为_____。

16、现有直径为 d 的圆木, 要把它锯成横断面为矩形的梁, 从材料力学知道, 横断面为矩形的梁的强度 $Q = k \cdot b \cdot h^2$, (b 为断面宽, h 为断面高, k 为常数) , 要使强度最大, 则高与宽的比是_____。

17、设 P_0 是抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 上的一点, M_1, M_2 是抛物线上的任意两点, k_1, k_2, k_3 分别是 P_0M_1, M_1M_2, M_2P_0 的斜率, 若 $k_1 - k_2 + k_3 = 0$, 则点 P_0 的坐标为_____。

18、过原点作互相垂直的两条直线, 分别交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点, 则线段 AB 中点的轨迹方程是_____。

19、给出一系列化合物的分子式: $C_6H_6, C_{10}H_8, C_{14}H_{10}, \dots$, 若该系列化合物的分子可以无限增大, 则该系列化合物分子中含碳元素的质量分数的极限值为_____%。

20、扇形铁皮 AOB , 弧长为 20 cm, 现剪下一个扇形环 $ABCD$ 做圆台形容器的侧面, 使圆台母线长 30 cm 并从剩下的扇形 COD 内剪下一个最大的圆, 刚好做容器的下底(指较大的底), 则扇形圆心角是_____度。

三、B组填空题(每题6分,共30分)

21、函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的周期为 2 的偶函数, 当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = x$, 则当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x)$ 的解析式写成分段函数的形式是_____ , 写成统一的形式是_____。

22、正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的所有棱长都相等， D 是 AA' 的中点，则 BC' 和 CD 所成的角是_____，面 BCD 与面 CDB' 所成二面角等于_____。

23、 $x, y \in R$ 且 $x^2 - \frac{9}{2}y^2 = 2$ ，则当有序数对 (x, y) 为_____时， $|2x+3y|$ 取得最小值_____。

24、数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{\pi}{3}n^2, (n \in N)$ ，则 $a_n =$ _____，

$\cos^2 a_{n-1} + \cos^2 a_n + \cos^2 a_{n+1} =$ _____。

25、圆锥曲线 G 的一个焦点是 F ，与之对应的准线是 l ，过 F 作直线与 G 交于 A, B 两点，以 AB 为直径作圆 M ，圆 M 与 l 的位置关系决定 G 是何种曲线之间的关系是：

圆 M 与 l 的位置	相离	相切	相交
G 是何种曲线			