

第十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第一试

一、选择题

1. 已知关于 x 的方程 $x^2-4x+a=0$ 和 $x^2-4x+b=0$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) 的四个根组成首项为 -1 的等差数列, 则 $a+b$ 的值等于 ()

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

2. 函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=f(x)=\arccos(x-1)$ 图象关于原点对称, 则 $y=g(x)$ 解析式是()

- A. $\arccos(x+1) - \pi$ B. $\arccos(x+1) + \pi$ C. $\pi - \arccos(x+1)$ D. $-\arccos(x+1)$

3. 在以下关于向量的命题中, 不正确的命题是 ()

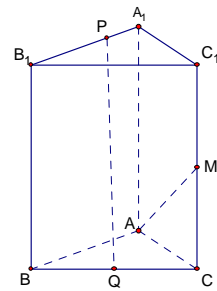
- A. 若向量 $\vec{a} = (x, y)$, 向量 $\vec{b} = (-y, x)$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$
 B. 四边形 ABCD 是菱形的充要条件是 $\vec{AB} = \vec{DC}$ 且 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$
 C. 若点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
 D. $\triangle ABC$ 中, \vec{AB} 和 \vec{CA} 的夹角等于 $180^\circ - A$

4. 某个命题与自然数 n 有关. 如果当 $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) 时, 该命题成立, 则可推出 $n=k+1$ 时该命题也成立. 现已知当 $n=10$ 时该命题不成立, 那么可推得 ()

- A. 当 $n=11$ 时, 该命题不成立. B. 当 $n=11$ 时, 该命题成立
 C. 当 $n=9$ 时, 该命题不成立 D. 当 $n=9$ 时, 该命题成立

5. 如图 1, 设 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱, $AB=AC$, $\angle BAC=90^\circ$, M, Q 分别是 CC_1, BC 的中点, P 点在 A_1B_1 上且 $A_1P:PB_1=1:2$. 如果 $AA_1=AB$, 则 AM 与 PQ 所成的角等于 ()

- A. 90° B. $\arccos \frac{1}{3}$ C. 60° D. 30°



6. Let functions $f(x) = x^2 + px + q$ and $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$ attain the equal minimum at the same point of the interval $[1, 2]$, Then minimum of $p^2 - 6q$ is ()

- A. -9 B. -8 C. not existing D. undetermined.

7. 函数 $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x + \sin x + 2}$ 的值域是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $3a_5 = 7a_{10}$, 且 $a_1 < 0$, 则前几项和 S_n ($n \in \mathbb{N}$) 中最小的是 ()

- A. S_7 或 S_8 B. S_{12} C. S_{13} D. S_{15}

9. 在直角坐标平面内, A 点在 $(4, 0)$, B 点在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上, 以 AB 为边作正三角形 ABC (A, B, C 按顺时针排列), 则顶点 C 的轨迹是 ()

- A. 圆 B. 椭圆 C. 抛物线 D. 双曲线的一支

10. 过椭圆的一个焦点 F 作与椭圆长轴的夹角为 $\arccos \frac{3}{4}$ 的直线, 交椭圆于 A, B 两点.

若 $|AF|:|BF| = 1:3$, 那么椭圆的离心率等于 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

二、A 组填空题

11. 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时, $p = \sin \theta + \csc \theta$ 和 $q = \tan \theta + \cot \theta$ 的大小关系是_____

12. 凸四边形 ABCD 中, $DC \parallel AB$, $AD=BC=CD=1$, $AB=2$ 。以它的一边为轴旋转, 所得旋转体的体积最大可达到_____

13. 记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则方程 $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}([x]-1) = [x]-6$ 的解是_____

14. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n, T_n 的比 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+1}{2n+7}$ 。用 n 表示, 则

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

15. 使 $(\sqrt{3} + i)^2$ 为纯虚数的正整数 n 的最小值等于_____

16. 为使函数 $f(x) = x^2 + 2x + \cos 2\theta - 3\sin \theta + 2$ 的值恒为正, 则参数 θ 在区间 $(0, \pi)$ 上的取值范围是_____

17. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(-1) > 0$, 且方程 $f(x) = 0$ 有三个根 $0, 1, 2$, 那么 c 的取值范围是_____

18. 抛物线 $y = x^2 - 4x - a^2 + 4a$ ($0 < a \leq 2$) 和 x 轴交于 A, B 两点, 动圆 M 过点 A, B 且和 y 轴切于点 C, O 是原点, 则 $|OC|$ 的取值范围是_____

19. 从点 $P(2a, 0)$ 看椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上两点, 最大的视角为 $2 \arctan \frac{1}{2}$, 则 $\frac{b}{a}$ 的

值等于_____

20. There are two travel projects from Beijing to Santiago, Chile: (A) Flying westward (向西) to New York, then flying southward to Santiago; (B) Flying southward from Beijing to Friemander, Australia, then flying westward to Santiago. The geographic positions of these four cities may be approximately considered as: Beijing (120° east longitude, 40° north latitude), New York (70° east longitude, 40° north latitude), Friemander (120° east longitude, 30° north latitude), Santiago (70° east longitude, 30° north latitude), Suppose that the air lines go along the spherical distance, then the project of the shorter distance is _____

三、B 组填空题

21. 若方程 $|x^2 - 4x + 3| - x = a$ 有三个不相等的实数根, 则 $a =$ _____

22. 已知点 $A(3, 1)$, 点 M, N 分别在直线 $y=x$ 和 $y=0$ 上, 当 $\triangle AMN$ 的周长最小时, 点 M 的坐标是_____, 点 N 的坐标是_____

23. 数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_n = 2 + \frac{1}{5}a_{n-1}$ ($n > 1$), 且首项 $a_1 = 5$, 则通项公式 $a_n =$ _____

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

24. 若 $a > -1$, 则不等式 $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq a$ 的解是_____

25. 某工厂安排甲、乙两种产品的生产。已知每生产 1 吨甲产品需要原材料 A、B、C、D 的数量分别是 1 吨、2 吨、2 吨、7 吨; 每生产 1 吨乙产品需要原材料 A、B、D 的数量分别是 1 吨、4 吨、1 吨。由于原材料的限制, 每个生产周期只能供应 A、B、C、D 四种原料分别为 80 吨、80 吨、60 吨、70 吨。若甲、乙产品每吨的利润分别为 2 百万元和 3 百万元。要想获得最大的利润, 应该在每个生产周期安排生产甲产品_____吨, 期望的最大利润是_____百万元。