

## 第十四届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题（每小题5分，共50分）

1、已知函数  $f(x) = 2x + 3$ , 则函数  $f^{-1}(x+1)$  的反函数是

- (A)  $y = \frac{x-5}{2}$       (B)  $y = \frac{x+5}{2}$       (C)  $y = 2x+5$       (D)  $y = 2x+2$

2、设  $0 < x < 1, a = \cos(\arcsin x), b = \arcsin(\cos x)$ , 则  $a$  和  $b$  的大小关系是

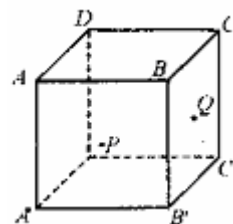
- (A)  $a < b$ .      (B)  $a > b$       (C)  $a \leq b$       (D) 不确定的。

3、已知  $X > 1, y > 1$ . 且  $\frac{1}{2}bx, \frac{1}{2}, \ln x$  成等比列, 则  $xy$  的

- (A) 最大值是  $\sqrt{2}$ .      (B) 最大值是  $e^{\sqrt{2}}$       (C) 最小值是  $\sqrt{2}$ .      (D) 最小值是  $e^{\sqrt{2}}$

4、如图1、一个正方体的容器  $ABCD-A'B'C'D'$  中盛满了油后, 在相邻两侧面的中心处出现了两个小孔, 若恰当地将容器放置。可使流出的油量达到最小, 这个最小值是正方体容器容量的。

- (A)  $\frac{1}{2}$ .      (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{1}{8}$       (D)  $\frac{3}{8}$



5、函数  $y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 10}$  的最小值是

- (A)  $2\sqrt{5}$       (B)  $2\sqrt{6}$       (C)  $\sqrt{17}$       (D)  $\sqrt{26}$

6、A hyperbola(双曲线) with vertices(顶点)  $(-2, 5)$  and  $(-2, -3)$ , has an asymptote(渐近线) that passes the point  $(2, 5)$ . Then an equation of the hyperbola is

- (A)  $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$       (B)  $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$   
 (C)  $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$       (D)  $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

7、等差数列  $\{a_n\}$  中有两项  $a_n$  和  $a_k$ , 满足  $a_n = \frac{1}{k}, a_k = \frac{1}{m}$ , 则该数列前  $mk$  项之和是

- (A)  $\frac{mk}{2} - 1$       (B)  $\frac{mk}{2}$       (C)  $\frac{mk+1}{2}$       (D)  $\frac{mk}{2} + 1$

8、当  $x, y$  满足条件  $|x-1| + |y+1| < 1$  时, 变量  $U = \frac{x-1}{y-2}$  的取值范围是

- (A)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$       (B)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$       (C)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$       (D)  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

9、设  $P$  为椭圆上一点, 且  $\angle PF_1F_2 = 30^\circ, \angle PF_1F_2 = 45^\circ$ , 其中  $F_1, F_2$  为椭圆的两个焦点,

则椭圆的离心率  $e$  的值等于

- (A)  $\frac{(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{2}$                       (B)  $\frac{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{2}$   
 (C)  $\frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2}$                       (D)  $\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2}$

10、Suppose the least distance from points of the curve (曲线)  $y^2 + 2xy + x + a = 0 (a \in R)$  to the y-axis is  $\frac{1}{4}$ , then the value of  $a$  is

- (A)  $-\frac{3}{16}$                       (B)  $-\frac{5}{16}$                       (C)  $-\frac{5}{16}$  or  $\frac{3}{16}$                       (D)  $-\frac{3}{16}$  or  $\frac{5}{16}$

二、组填空题 (每小题 5 分, 共 50 分)

11、 $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \arctan 7 =$ \_\_\_\_\_。

12、不等式  $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+1) - \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}-1) < -\frac{1}{2}$  的解集是\_\_\_\_\_。

13、图 2 是正方体的展开图, 其中直线 AB 与 CD 在原正方体中的成角的大小是\_\_\_\_\_。

14、正四面体 ABCD 的棱长为 1, E 在 BC 上, F 在 AD 上, BE=2EC, DF=2FA, 则 EF 的长度是\_\_\_\_\_。

15、Let  $a$  and  $\sqrt{2}a$  be the length of two sides of a rectangle (矩形), rotate (旋转) the rectangle about its diagonal (对角线), then the volume (体积) of the revolution (旋转体) obtained is equal to\_\_\_\_\_。

16、方程  $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$  表示的曲线是\_\_\_\_\_。

17、曲线  $x^2 + y^2 + y + m = 0$  和它关于直线  $x + 2y - 1 = 0$  的对称曲线总有交点, 那么  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

18、等比数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a_1 = a$ , 公比为  $q$ , 则  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} =$ \_\_\_\_\_。

19、在平面四边形 ABCD 内, 点 E 和 F 分别在 AD 和 BC 上, 且  $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda \in R, \lambda \neq -1)$ , 用  $\lambda, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$  表示  $\overrightarrow{EF} =$ \_\_\_\_\_。

20、延长平行四边形 ABCD 的边 BC 到 F, AF 依次交 DB、DC 于 E、G, AE 比 EG 大 2, GF=5, 则 EG=\_\_\_\_\_。

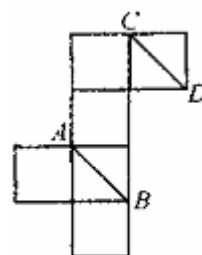


图 2

三、B 组填空题 (每小题 10 分, 共 50 分)

21、 Given  $BC=1, \angle A = \alpha$  in a triangle ( 三角形 ) ABC, then the range of length of the side AB (or AC) is\_\_\_\_\_。

22、 方程  $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$  的实数解最多有\_\_\_\_\_个，若方程有实数解，则 a 的取值范围是\_\_\_\_\_。

23、 圆  $x^2 + y^2 = 1$  和  $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 11 = 0$  的公切线的斜率是\_\_\_\_\_。

24、 数列  $\{2^n\}$  和  $\{3n+2\}$  的公共项由小到大排列成数列  $\{c_n\}$ ，则  $\{c_n\}$  的通项公式

$c_n =$ \_\_\_\_\_，前 n 项和  $S_n =$ \_\_\_\_\_。

25、 函数  $y = \sin x + \cos x + \frac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$  的最大值等于\_\_\_\_\_，最小值等于\_\_\_\_\_。