

## 第十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题（每题4分，共40分）

1. 四个数  $\frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \sqrt{3}, \tan \sqrt{3}, \arctan \sqrt{3}$  的大小关系是 ( )

A.  $\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan \sqrt{3} < \sin \sqrt{3} < \arctan \sqrt{3}$       B.  $\tan \sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \sin \sqrt{3} < \arctan \sqrt{3}$

C.  $\sin \sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \arctan \sqrt{3} < \tan \sqrt{3}$       D.  $\tan \sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \arctan \sqrt{3} < \sin \sqrt{3}$

2. 已知不等式  $|x-a|+|x-b|<1$  (其中 a, b 是常数) 的解集是空集, 则  $|a-b|$  的取值范围是 ( )

A.  $(-1,1)$     B.  $(0,1)$     C.  $[1,+\infty)$     D.  $(0,+\infty)$

3. 集合 M 是函数  $y = \lg(-x^2 + 8x + 20)$  的单调递减区间,  $N = \left\{ x \mid \frac{\sqrt{x^2 - x - 12}}{10 - x} \geq 0 \right\}$ , 那

么 “ $x \in M \cup N$ ” 是 “ $x \in M \cap N$ ” 的 ( )

A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件    C. 充要条件    D. 既不充分又不必要条件

4. 下列四个函数:

$f(x) = x^2 - 2x$ ;       $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$ ;

$f(x) = 2^x + x$ ;       $f(x) = \log_2(2x-1), x > \frac{1}{2}$ .

其中, 能是  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$  恒成立的函数的个数是 ( )

A. 1                  B. 2                  C. 3                  D. 4

5. The number of monotonic intervals of the function  $y = \left| |x^2 - 2x - 3| - 2 \right|$  is ( )

A. 2                  B. 4                  C. 6                  D. 8

6. 设  $f(x) = x^2 + bx + c (b, c \in R)$ ,  $A = \{x \mid x = f(x), x \in R\}$ ,  $B = \{x \mid x = f(f(x)), x \in R\}$ ,

如果 A 中只含一个元素, 那么 ( )

A.  $A \subset B$                   B.  $A \supset B$                   C.  $A = B$                   D.  $A \cap B = \emptyset$

7. 已知  $\{a_n\}$  是公差为 0 的等差数列, 且  $a_n \geq 0$ ; 又定义

$b_n = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{2004-n}} (1 \leq n \leq 2003)$ , 则  $\{b_n\}$  的最大值是 ( )

- A.  $b_{1001}$  B.  $b_{1002}$  C.  $b_{2003}$  D. 不能确定的

8. 两个非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 则当  $\vec{a} + t \cdot \vec{b} (t \in R)$  的模取最小值时,  $t$  的值是 ( )

- A.  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$  B.  $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$  C.  $-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cos \theta$  D.  $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cos \theta$

9. 椭圆有这样的光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经椭圆反射后, 反射光线经过椭圆的另一个焦点. 今有一个水平放置的椭圆形台球盘, 点 A、B 是它的两个焦点, 其中焦距为  $2c$ , 长轴长为  $2a$ , 当放在点 A 处的小球被击出发, 经椭圆壁反弹后再回到点 A 时, 小球经过的路程是 ( )

- A.  $4a$  B.  $2(a-c)$  C.  $2(a+c)$  D. 以上答案均有可能

10. 通过两个定点  $A(a, 0), A_1(a, a)$ , 且在  $y$  轴上截得的弦长等于  $2|a|$  的圆的方程是 ( )

- A.  $2x^2 + 2y^2 + ax - 2ay - 3a^2 = 0$  B.  $2x^2 + 2y^2 - ax - 2ay - 3a^2 = 0$   
C.  $4x^2 + 4y^2 + ax - 4ay - 3a^2 = 0$  D.  $4x^2 + 4y^2 - ax - 4ay - 3a^2 = 0$

## 二、A 组填空题 (每题 4 分, 共 40 分)

11. 若  $\sin \alpha$  是方程  $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$  的根, 则  $\sin 2(\alpha + \frac{\pi}{4})$  的值是\_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{|x+a|+a}$  是奇函数的充要条件是:  $a$  满足\_\_\_\_\_.

13. 金刚石是由碳原子组成的单质, 在金刚石的晶体里, 每个碳原子都被相邻的 4 个碳原子包围, 且处于 4 个碳原子的中心, 以共价键跟这 4 个碳原子结合. 那么, 在金刚石的晶体结构中, 相邻的两个共价键之间的夹角 (用反三角函数表示) 是\_\_\_\_\_.

14. 已知  $a > 0$ ,  $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ , 则  $f(\frac{1}{2004}) + f(\frac{2}{2004}) + \dots + f(\frac{2003}{2004}) =$ \_\_\_\_\_.

15. 抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  关于点  $A(-2, 1)$  对称的曲线的方程是\_\_\_\_\_.

16. 已知点  $A(3, 1)$ , 点 M 在直线  $x - y = 0$  上, 点 N 在  $x$  轴上, 则  $\triangle AMN$  周长的最小值是\_\_\_\_\_.

17. If the equation  $x^2 - 4|x| + 6 = a$  has two distinct real roots, then the range of real number  $a$  is\_\_\_\_\_. (英汉小词典 distinct: 不同的; roots: 根; range: 范围)

18.  $x, y \in R$  时, 函数  $f(x, y) = (x+y)^2 + (\frac{1}{x} - y)^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.

19. 设双曲线的离心率、实轴长、虚轴长、焦距依次成等差数列, 则此双曲线的方程是\_\_\_\_\_.

20. 在空间四边形 ABCD 中,  $BC=AD$ , E、F、M、N 分别是 AB、CD、BD、AC 的中点,

则 EF 与 MN 的夹角等于\_\_\_\_\_.

三、B 组填空题 (每题 4 分, 共 40 分)

21. 函数  $y = \sin x + \cos 2x (0 \leq x \leq 2\pi)$  的值域是\_\_\_\_\_, 单调递减区间是\_\_\_\_\_.

22. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = a, a_2 = a^a, a_3 = a^{a^a}$ , 依次类推, …… , 其中  $0 < a < 1$ , 则此数列的最大项是\_\_\_\_\_, 最小项\_\_\_\_\_.

23. 某运动会开了  $n$  天 ( $n > 1$ ), 共发出  $m$  枚奖牌: 第一天发出 1 枚加上余下的  $\frac{1}{7}$ , 第二天发出 2 枚加上余下的  $\frac{1}{7}$ ; 如此持续了  $(n-1)$  天, 第  $n$  天发出  $n$  枚. 该运动会开了\_\_\_\_\_天, 共发了\_\_\_\_\_枚奖牌.

24. 设  $x \in [-1, 1]$ ,  $f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数, 且  $f(x) - g(x) = \lg(2-x)$ , 则  $g(x) =$ \_\_\_\_\_,  $10^{g(x)}$  的最大值是\_\_\_\_\_.

25. Let M be a point of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , let P and Q be focuses of the ellipse.

Then the maximum of the quantity  $|PM|^3 + |QM|^3$  is \_\_\_\_\_, the minimum is \_\_\_\_\_. (英汉小词典 ellipse: 椭圆; focus: 焦点; maximum: 最大值; minimum: 最小值.)