

第十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

一、选择题（每小题4分，共40分）

1. 有以下四个命题其中，正确命题的个数是

(1) $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称

(2) $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(-x)$ 的图象关于直线 $y = -x$ 对称

(3) $y = f(x)$ 和 $y = -f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = -x$ 对称

(4) $y = f(x)$ 和 $y = -f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 若集合 $\{\sin \alpha, \cot \alpha, 1\}$ 和 $\{\sin^2 \alpha, \sin \alpha + \cos \alpha, 0\}$ 是相同的，则 $\sin^{2005} \alpha + \cos^{2005} \alpha =$

(A) 0 (B) 1 (C) ± 1 (D) -1

3. “ $\Delta = a^2 - 4b > 0, ab < 0, a - b < 0$ ” 是 “方程 $x^4 + ax^2 + b = 0$ 有四个实根” 的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 即不充分也不必要条件

4. 最长边的长度为 18 且各边的边长都是整数的三角形有

(A) 90 个 (B) 91 个 (C) 92 个 (D) 171 个

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2 + a_7 + a_8 + a_{11} = 48$ ， $a_3 : a_{11} = 1 : 2$ ，橙子奥数

工作室录入暗记，则 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} =$

(A) 2744 (B) 2800 (C) 585 (D) 595

6. 已知 $y = f(x)$ 的图象如图 1 所示，则 $y = |f(-x+2)| - 1$ 的图象是

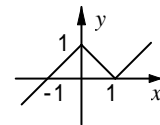
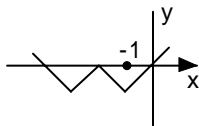
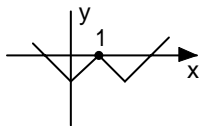


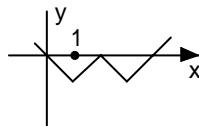
图 1



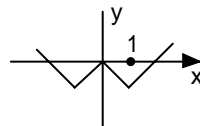
(A)



(B)



(C)



(D)

7. 正五棱锥的侧面三角形的顶角的取值范围是

(A) $(54^\circ, 72^\circ)$ (B) $(0^\circ, 72^\circ)$ (C) $(72^\circ, 90^\circ)$ (D) 不能确定

8. 三棱锥的三个侧面都是直角三角形，且三个直角的顶点恰是三棱锥的顶点，则其底面一定是

(A) 直角三角形 (B) 钝角三角形 (C) 锐角三角形 (D) 等边三角形

9. 方程 $\sqrt{6(x-4)^2 + 6(y-3)^2} = |2x + y - 18|$ 所表示的曲线是

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

10. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，且点 P 的横坐标是 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ，则 $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{5}$

二、A 组填空题（每小题4分，共40分）

11. 设集合 $M = \{x | |x| + x + a < 0, x \in R\}$, $N = \{x | \arcsin(\sqrt{x + \frac{3}{x}}) > 0, x \in R^+\}$, 则下列 4 种关系中,

$M = N$, N 是 M 的真子集, M 是 N 的真子集, $M \cap N = \emptyset$ 成立的个数是_____.

12. 已知 A、B 是平面 α 外两点, 在 α 内和 A、B 等距离的点的集合可能是_____.

13. 不等式 $\frac{3x-5}{x^2+ax-3} \geq 2$ 的解集是 $(-3, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1)$, 那么参数 $a =$ _____.

14. 过点 A(2, 0) 的直线把圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ (区域) 分成两部分 (弓形), 它们所包含的最大圆的直径之比是 1:2, 则此直线的斜率是_____.

15. 如图 2, 半径为 r , 质量不计的圆盘与地面相互垂直, 圆心 O 处有一垂直于盘面的光滑水平固定轴, 在盘的最右边缘固定有一个质量为 m 的小球 A, 在 O 的正下方 $r/2$ 处固定有一个质量为 m 的小球 B, 放开圆盘让其自由转动, 则转动过程中半径 OA 向左偏离的最大角度是_____.

16. 已知正数 x 、 y 满足 $x + y = 5$, 若 $\lg x + \lg y \leq k$ 恒成立, 则 k 的最小值是_____.

17. 实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的一根在区间 $(0, 1)$ 内, 另一根在区间 $(1,$

$2)$ 内, 橙子奥数工作室录入暗记, 则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是_____.

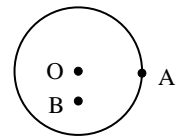


图 2

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, 过椭圆中心的直线 l 交椭圆于 A、B 两点, 且与 x 轴成 60

度角, 设 P 为椭圆上任意一点, 则三角形 PAB 的面积的最大值是_____.

19. 直三棱柱的侧棱长为 2, 一侧棱到对面的距离不小于 1, 从此三棱柱中去掉以此侧棱为直径的球所占的部分, 余下的几何体的表面积与原三棱柱的表面积相等, 则所剩几何体体积的最小值是_____.

20. 已知双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点为 F, P 是双曲线上任意一点, 定点 $M(6, 2)$, 则 $3|PM| + \sqrt{5}|PF|$

的最小值是_____.

三、B 组填空题 (每题 8 分, 共 40 分)

21. 函数 $y = \arccos(x^2 - \frac{1}{2})$ 的定义域是_____, 值域是_____.

22. 已知函数 $y = |\log_a(x+a)|$, 当 $a > 1$ 时, 它的单调增区间是_____, 当 $0 < a < 1$ 时, 它的减区间是_____.

23. 在一个广场上, 甲、乙二人分别从相距 100m 的 A、B 两地同时运动, 甲以 2m/s 的速度沿东偏北 60 度方向运动, 乙以 $3\sqrt{2}$ m/s 的速度沿西偏南 45 度方向运动, t s 后, 甲、乙分别位于 C、D 两地, 且 $CD \perp AB$, 则 $t =$ _____s, 此时甲、乙相距_____m.

24. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n-1}$, 则它的通项公式 $a_n =$ _____, 前 n 项和 $S_n =$ _____.

25. 抛物线 $y = 3x^2 + ax$ 的准线是 $y = -1$, 则 $a =$ _____, 焦点坐标是_____.