

第十七届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试

2006年3月19日 上午8:30 — 10:00

试题收集：浙江嘉善 祖正石 录入：成俊锋 录入时间：2006年3月19日

一、选择题（每小题4分，共40分）

1. 否定结论“至少有两个解”的正确说法是

- A、至少有三个解 B、至多有一个解 C、至多有两个解 D、只有一个解

2. 点 $P(\ln(2^x + 2^{-x}) - \tan \frac{\pi}{6}, \cos 2)$ ($x \in R$) 位于坐标平面的

- A、第一象限 B、第二象限 C、第三象限 D、第四象限

3. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的函数，条件甲： $y = f(x)$ 没有反函数；条件乙： $y = f(x)$ 不是单调函数。则条件甲是条件乙的

- A、充分不必要条件 B、必要不充分条件 C、充要条件 D、既不充分也不必要条件

4. 橙子奥数工作室防盗暗记。已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 θ 的值等于

- A、 $-\arccos \frac{\sqrt{21}+1}{9}$ B、 $-\arccos \frac{\sqrt{21}-1}{9}$ C、 $-\arcsin \frac{\sqrt{17}+1}{6}$ D、 $-\arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{6}$

5. Suppose that $a \in R$, line $(1-a)x + (a+1)y - 4(a+1) = 0$, always passes through a fixed point P , and point Q is on the curve $x^2 - xy + 1 = 0$. Then the range of slope of a line passing through P and Q is

- A、 $[-2, +\infty)$ B、 $[-3, +\infty)$ C、 $(1, +\infty)$ D、 $(3, +\infty)$

(英汉词典：fixed point 固定点；range 范围；slope 斜率；to pass through 通过)

6. 函数 $y = \sqrt{5-4x-x^2} + \log_{\frac{1}{2}}(\cos 2x + \sin x - 1)$ 的定义域是

- A、 $(0, \frac{1}{2})$ B、 $[-5, -\frac{7\pi}{6}) \cup (0, \frac{\pi}{6})$ C、 $(-\frac{7\pi}{6}, -\pi) \cup (0, \frac{\pi}{6})$ D、 $(0, \frac{\pi}{6})$

7. 关于方程 $\frac{x^2}{\sin \alpha} + \frac{y^2}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ (α 是常数且 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$), 以下结论中不正确的是

- A、可以表示成双曲线 B、可以表示椭圆 C、可以表示圆 D、可以表示直线

8. F_1, F_2 为椭圆的焦点, P 为椭圆上一点, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 且 $|PF_2| < |PF_1|$, 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则

$\angle PF_1F_2 : \angle PF_2F_1 =$

- A、1:5 B、1:3 C、1:2 D、1:1

9. 关于 x 的方程 $|e^{|\ln x|} - 2| = t$ ($0 < t < 1$), 其中 t 是常数, 则方程根的个数是

- A、2 B、3 C、4 D、不能确定

10. 若双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ ($a > 0$) 关于直线 $y = x - 2$ 对称的曲线与直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 相切, 则 a 的值为

- A、 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ B、 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ C、 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ D、 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

二、A组填空题（每小题4分，共40分）

11. 直线 $3x + 2y = 1$ 上的点 P 到点 $A(2, 1), B(1, -2)$ 的距离相等, 则点 P 的坐标是_____.

12. 已知向量 a 和 b 满足 $|a| = 2, |b| = 1$, 且夹角为 60° , 则使向量 $a + \lambda b$ 与 $\lambda a - 2b$ 的夹角为钝角的实数 λ 的取值范围是_____.

13. 已知 $|ax-3| \leq b$ 的解集是 $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$, 则 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 不等式 $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x > 8$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

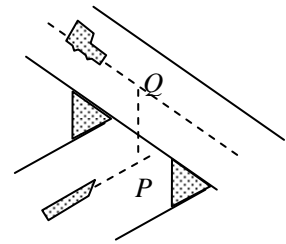
15. 方程 $(\arccos x)^2 + (2-t)\arccos x + 4 = 0$ 有实数解, 则 t 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. ABC 的三个内角为 A, B, C , 且 $2C-B=180^\circ$, 又 ABC 的周长与最长边的比值为 m , 那么 m 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 双曲线 $x(y+1)=1$ 的准线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 不等式 $x+2\sqrt{2xy} \leq a(x+y)$ 对于一切正数 x, y 恒成立, 则实数 a 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

19. 一只小船以 10m/s 的速度由南向北匀速驶过湖面, 在离湖而高 20m 的桥上, 一辆汽车由西而东以 20m/s 的速度前进, 如图, 现在小船在水面 P 点以南的 40m 处, 汽车在桥上 Q 点以西 30m 处 (其中 PQ 水面), 则小船与汽车间的最短距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$ m. (不考虑汽车与小船本身的大小).



20. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1 , 在正方体表面上与点 A 距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的集合形成一曲线 (此曲线不一定在同一平面上), 则此曲线的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、B 组填空题 (每空 4 分, 每小题 8 分)

21. Let S_n be the sum of the first n terms of an arithmetic sequence. Assume that $S_3 = 9$, $S_{20} > 0$, and $S_{21} < 0$. Then the range of the common difference d is $\underline{\hspace{2cm}}$, the maximum term of the sequence S_1, S_2, S_3, \dots is $\underline{\hspace{2cm}}$. (英汉词典: term 项; arithmetic sequence 等差数列; common difference 公差 the maximum term 最大(值)项)

22. 若 $x, y \in \mathbb{R}$, 且满足 $\sqrt{x+2} + \sqrt{y-5} = 6$, 则 $x+2y$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$; 最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

23. 经过点 $E(p/2, 0)$ 的直线 l , 交抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 于点 A, B 两点, l 的倾斜角为 α , 则 α 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$; F 为抛物线的焦点, ABF 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用 p, α 表示)

24. 球面上有十个圆, 这十个圆可将球面至少分成 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个区域, 至多分成 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个区域.

25. 点 $P(x, y)$ 的坐标满足关系式 $\begin{cases} 2x+y \geq 15 \\ x+3y \geq 27 \\ x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$, 且 x, y 均为整数, 则 $x+y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 此时 P 点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

简略答案: BDADB CDACB

11、 $(3/7, -1/7)$ 12、 $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$ 13、6 14、 $(-\infty, \log_{2+\sqrt{3}}(4-\sqrt{15})) \cup (\log_{2+\sqrt{3}}(4+\sqrt{15}), +\infty)$

15、 $[6, +\infty)$ 16、 $9/4$ 17、 $y = -x - 1 \pm \sqrt{2}$ 18、2 19、30 20、 $5\sqrt{3}\pi/6$

21、 $(-6/17, -1/3)$; S_{10} 22、32, 80 23、 $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$; $p^2 \sqrt{\cos 2\alpha} / \sin \alpha$

24、11, 92 25、12; $(3, 9), (4, 8)$