

第一届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 直线 $Ax + By + c = 0$ (A, B 不全为零) 的倾斜角是

- A. $B = 0$ 时, 倾斜角是 $\frac{\pi}{2}$, $B \neq 0$ 时, 倾斜角是 $\arctan(-\frac{A}{B})$
B. $A = 0$ 时, 倾斜角是 $\frac{\pi}{2}$, $A \neq 0$ 时, 倾斜角是 $\arctan(-\frac{B}{A})$
C. $A = 0$ 时, 倾斜角是 0 , $A \neq 0$ 时, 倾斜角是 $\arctan(-\frac{B}{A})$
D. $B = 0$ 时, 倾斜角是 0 , $B \neq 0$ 时, 倾斜角是 $\arctan(-\frac{A}{B})$

2. 数列 $\{a_n\}: a_1 = p, a_{n+1} = qa_n + r$ (p, q, r 是常数), 则 $r = 0$ 是数列 $\{a_n\}$ 成等比数列的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 不充分也不必要条件

3. f 是上 $R \rightarrow R$ 的一一映射, 函数 $y = f(x)$ 严格递增, 方程 $x = f(x)$ 的解集为 P , 方程

$x = f[f(x)]$ 的解集为 Q , 则

- A. $P \subset Q$ B. $P = Q$ C. $P \supset Q$ D. 以上都不对

4. 点 (x, y) 的坐标 x, y 都是有理数时, 该点称为有理点, 在半径为 r , 圆心为 (a, b) 的圆中,

若 $a \in Q, b \in \overline{Q}$, 则这个圆上的有理点的数目

- A. 最多有一个 B. 最多有两个 C. 最多有三个 D. 可以有无穷多个

5. 以某些整数为元素的集合 P 具有以下性质: (1) P 中元素有正数也有负数, 有奇数也有偶数 (2) $-1 \notin P$ (3) 若 $x, y \in P$, 则 $x + y \in P$

对于集合 P , 可以断定

- A. $0 \in P, 2 \notin P$ B. $0 \notin P, 2 \in P$ C. $0 \in P, 2 \in P$ D. $0 \notin P, 2 \notin P$

二、填空题

6. 方程 $\arcsin(\sin x) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \times \frac{x\sqrt{x}}{|x|}$ 的实根的个数是_____.

7. 使不等式 $|(x-1)(x+1)| + |(x-2)(x+2)| + |(x-3)(x+3)| < (t-x)(t+x)$ 的解集为空集的实数 t 形成一个集合, 把这个集合用区间形式写出来, 就是_____.

8. 椭圆的两个焦点是 $F_1(3, -6), F_2(6, 3)$, 一条切线为 $4x = 3y$, 这个椭圆的离心率是_____.

9. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{1989 \times 1990}] +$
 $[-\sqrt{1}] + [-\sqrt{2}] + [-\sqrt{3}] + \cdots + [-\sqrt{1989 \times 1990}]$ 的值是_____.

三、解答题

10. 数列 $\{\arccos 2n^2\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 证明, 对一切 $n \in N$, 都有 $S_n < \frac{\pi}{4}$.

11. 用 4 块腰长为 a , 上、下底边长各是 $a, 2a$ 的等腰梯形硬纸片和两块平面多边形硬纸片可以围成一个六面体, 求六面体的体积.

12. 正方形 $PQRS$ 的顶点 Q, R, S 分别在边长为 2 的正三角形 ABC 的边 AB, BC, CA 上滑动, 求 P 点的轨迹方程.