

第二届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

- 映射 $f:(a,b,c,d) \rightarrow (1,2,3)$, 如果 $10 < f(a)f(b)f(c)f(d) < 20$, 这样的映射共有
A . 23 个 B . 24 个 C . 25 个 D . 26 个
- 曲线 $\frac{x^2}{16-k} - \frac{y^2}{k} = 1$ 与曲线 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 的焦距相等的充要条件是
A . $k < 16$ 且 $k \neq 0$ B . $k > 0$ 且 $k \neq 16$ C . $0 < k < 16$ D . $k < 0$ 或 $k > 16$
- 定义在全体实数上的函数 $f(x)$, 满足: (1) $f(x^3) = f^3(x)$ (2) 对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 则 $f(-1) + f(0) + f(1)$ 的值是
A . 0 B . 1 C . -1 D . 不能确定
- 正方体表面正方形的对角线所在直线中有两条直线的距离是 1 , 则此正方体的体积是
A . 1 B . $3\sqrt{3}$ C . 1 或 $3\sqrt{3}$ D . $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}$
- $M = \{(x, y) = x^3 + 8y^3 + 6xy \geq 2, x, y \in R\}$, $P = \{(x, y) = x^2 + 8y^2 \leq t^2, t \in R, t \neq 0\}$, 若 $P \cap M = \emptyset$, 则有
A . $-1 < t < 1$ B . $-\frac{\sqrt{3}}{4} < t < \frac{\sqrt{3}}{4}$ C . $-\frac{\sqrt{5}}{5} < t < \frac{\sqrt{5}}{5}$ D . $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$
- 函数 $f(x) = \arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x)$ 的值域是
A . $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ B . $[0, \frac{3\pi}{2}]$ C . $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ D . $[0, \pi]$
- 把函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象在坐标轴内以原点为旋转中心按逆时针方向旋转 90 度 , 得到
A . $y = -f(x)$ B . $y = f(-x)$ C . $y = -f^{-1}(x)$ D . $y = -f(-x)$
- 过 $A(p, 0)$ 作抛物线 $y^2 + p^2 = 2px (p > 0)$ 的与对称轴垂直的弦 P_1P_2 , O 为原点 , 则 $\angle P_1OP_2$ 是
A . 直角 B . 钝角 C . 锐角 D . 不确定
- 设 $f(x) = \arccos x + 2\arcsin x$, 则 $f^{-1}(x)$ 是
A . $\sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ B . $\cos x, x \in [0, \pi]$ C . $-\sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ D . $-\cos x, x \in [0, \pi]$
- 设 $x, y \in R, |x| < 1, |y| < 1$, 记 $[x]$ 表示不超过 x 实数的最大整数 , 则不等式

$[x+y] \leq [x] + [y]$ 的解集区域图是 (此题改为作图题, 选项略去)

二、填空题

11. 集合 $M = \{(x, y) \mid |x-6| + |y+12| = |x-12| + 2|y+3| = 15, x, y \in R\}$ 中的元素的个数是_____.

12. 已知台体上、下底的面积分别为 S_1, S_2 , 若与底面平行的平面把台体截成体积相等的两部分, 则截面面积为_____.

13. 方程 $x^3 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{6} + 3 = 0$ 的全部负根之和是_____.

14. 以实数 x, y 为自变量的函数 $u(x, y) = x^2 + \frac{81}{x^2} - 2xy + \frac{18}{x}\sqrt{2-y^2}$ 的最小值是_____.

15. 过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0$ 的交点的直线方程可表示为_____.

16. $\{x\}$ 表示不小于实数 x 的最小整数, 则 $\{\log_2 1\} + \{\log_2 2\} + \cdots + \{\log_2 1991\} =$ _____.

17. 函数 $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ 的值域是_____.

18. $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in R$ 都有 $f(x_1 - x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 则它的奇偶性是_____.

19. 定义在正整数上且函数值总是自然数的严格增函数 $f(n)$, 对任意 $m, n \in N^+$, 当 m, n 的最大公约数是 1 时, $f(mn) = f(m) \times f(n)$. 若 $f(180) = 180$, 则 $f(1991) =$ _____.

20. 正十二面体有 20 个顶点, 30 条棱, 每一个顶点是 3 条棱的交点, 这三条棱的另一个端点是正十二面体的另外 3 个顶点, 我们称这 3 个顶点与前一个顶点是相邻的. 在每个顶点处放上一个实数, 要求每个顶点所放的实数恰是该顶点相邻的 3 个顶点处所放实数的算术平方值. 设 M, m 分别是这 20 个实数中最大的和最小的, 则 $M - m$ 的取值范围是_____.

三、解答题

21. 直角三角形 ABC 中 $AB = AC$. 用 C 点为一个焦点作一个椭圆, 使这个椭圆的另一个焦点在 AB 边上, 且椭圆过 A, B 点. 求这个椭圆的离心率.

22. 已知正四面体 $ABCD$, 考察下列集合. X : 与四面体四个顶点的距离都相等的平面; Y : X 中任意两平面的交线; Z : Y 中任意两直线的交点; 求: Z 中包含的元素数目, 并指出 Z 中各元素在空间的位置 (也可画出 Z 中各元素的空间位置并加以说明).