

第三届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 从动点 $P(x,3)$ 向圆 $(x+y)^2 + (y+2)^2 = 1$ 引切线, 则切线长度的最小值是

A. 4 B. 5 C. $2\sqrt{6}$ D. 6

2. 当 $x \in R$ 时, 函数 $y = x^6 - x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}$ 的值是

A. 正数 B. 负数 C. 正数或零 D. 任意实数

3. 已知 $x \in N$, 有以下四个式子: $6^n + 3^n$; $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$; $11^n - 2^n$; $2^{4n+2} + 5^{2n+1}$ 其中能被 9 整除的式子的个数是

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 设集合 $A = \{x | \sqrt{x-1} \geq x-1\}$, $B = \{x | \arcsin \frac{\pi}{2} + 2 \arccos \frac{\pi}{2} < \pi\}$, 那么

A. $A=B$ B. $A \subset B$ C. $B \subset A$ D. $A \cap B = \emptyset$

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \log_a x$, 公比 $a = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3}$, 那么这个数列是

A. 递增数列 B. 递减数列 C. 递增数列或者递减数列 D. 以上都不对

6. $A = \{x | x = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n}{n^2}, n \in N\}$, $B = \{x | 4x^2 - 24x + 35 < 0\}$, 则 $A \cap B$ 是

A. $(2, 3]$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3\}$ D. 空集

7. 方程 $a \cos \frac{x}{3} = 10^x + 10^{-x} + 1$ 的实根的个数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 椭圆曲线上两个点的连接线段称为椭圆的弦, 经过椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内的点 $A(\frac{3}{4}\sqrt{7}, 0)$ 有

k 条长度成等差数列的弦, 公差 $d \in [\frac{1}{2}, 1]$, 则 k 值的集合是

A. $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ B. $\{3, 4, 5, 6\}$ C. $\{4, 5, 6, 7\}$ D. $\{5, 6, 7\}$

9. 若 $x \in R$, 则数列 $\{\cos[x + \frac{2}{7}(n-1)\pi]\}$ 的前 7 项和

A. 比 1 大 B. 比 1 小 C. 等于 1 D. 是零

10. 动圆 M 过定点 A 且和定圆 O 相切, 那么动圆 M 的中心的轨迹是

A. 圆 B. 圆或椭圆 C. 圆或椭圆或双曲线 D. 圆或椭圆或双曲线或直线

二、填空题

11. 长方体的棱长的和是 l , 则该长方体的体积的最大值是_____.

12. 椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 和 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有相同的离心率, 则 m 的值是_____.

13. 若 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 则不等式 $(\frac{2}{3})^{\log_a |x-1|} < \frac{9}{4}$ 的解是_____.

14. 从点 $A(-1, \frac{1}{2})$ 向圆 $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$ 引两条切线, 则过切点的弦的方程是_____.

15. 方程 $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ 的解是_____.

16. 数列 $\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\}$ 的前 n 项的和是_____.

17. 函数 $y = \cos x + \sin x \cos x$ 的值域是_____.

18. m 是任意实数, θ 是给定的实数, 由关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases} x = 3 + (1+m^2)\cos\theta \\ y = 1 + (1-2m^2)\sin\theta \end{cases}$ 确定

的动点 (x, y) 在平面直角坐标系内对应的图形是_____.

19. $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 则方程 $[3x - 4\frac{5}{6}] - 2x - 1 = 0$ 的解是_____.

20. 平面上有 A, B 两个定点, 在平面上随意放置 k 个点 $C_i (i=1, 2, \dots, k)$, 能从中找到两个点 C_k, C_p , 使不等式 $|\sin \angle AC_k B - \sin \angle AC_p B| \leq \frac{1}{1991}$ 成立, 那么 k 的最小值是_____.

三、解答题

21. 已知 $k \in R$, 关于 x, y 的方程 $y^4 + 4y^3 + (2x + 2kx - kx^2)y^2 + 8xy + (4kx^2 - 2kx^3) = 0$ 表示一组曲线, 其中有一条是固定的抛物线. 试讨论 k 与曲线形状的关系.

22. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 求证: (1) $\sin x > x - \frac{x^3}{4}$; (2) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.