

第四届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 已知正方体、等边圆柱、球的表面积都是 S ，体积依次是 V_1, V_2, V_3 ，则
A. $V_1 < V_2 < V_3$ B. $V_3 < V_2 < V_1$ C. $V_3 < V_1 < V_2$ D. $V_2 < V_1 < V_3$
2. “ a_1, a_2, \dots, a_n 中至少有一个大于 $\frac{A}{n}$ ” 是 “ $a_1 + a_2 + \dots + a_n > A$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. (改编) 下列关于函数 $y = 2^{\frac{|1-x^2|}{1+|x|}}$ 的说法中正确的是
A. 与 $y = |1 - |x||$ 是同一函数 B. 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 1
C. 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 2 D. 在 $[-1, 0]$ 上单调递减
4. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A \neq 0, \omega > 0, x \in R$) 为偶函数的充要条件是
A. $\varphi = 2k\pi$ B. $\varphi = k\pi$ C. $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ D. $\varphi = k\pi + \frac{k\pi}{2}$ (各选项中 $k \in Z$)
5. 设 $a = \tan(\arccot \frac{9}{10}), b = \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}, c = \arccos(-\cos \frac{27\pi}{6})$ ，则
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < b < a$
6. 从 1 到 100 的自然数中，每次取出不同的两个数，使它的和大于 100，则不同的取法有
A. 50 种 B. 100 种 C. 1275 种 D. 2500 种
7. 过抛物线 $y^2 = x$ 的焦点 F 的直线 l 的倾斜角 $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ ， l 交抛物线于 A, B 两点，且 A 点在 x 轴上方，则 $|FA|$ 的取值范围是
A. $(\frac{1}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $(\frac{1}{4}, 1]$ C. $[\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$
8. 已知三角形的三个内角的余切值的和为 $\sqrt{3}$ ，则此三角形是
A. 直角不等腰三角形 B. 等腰直角三角形 C. 等腰不等边三角形 D. 等边三角形
9. 函数 $y = \cos x - \cos 3x$ 的最大值是
A. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{9}{8}\sqrt{3}$
10. 数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 的前 1000000 项和的整数部分是
A. 1997 B. 1998 C. 1999 D. 2000

二、填空题

11. 已知 α, β 都是锐角, $\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{1}{3}, \cos \alpha - \cos \beta = \sqrt{\frac{1}{5}}$, 则 $\sin \alpha - \sin \beta =$ _____.

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧棱 PA, PB, PC 两两垂直, 又知六条棱长的和为定值 l , 则此三棱锥的体积的最大值是_____.

13. 已知方程 $\sin^4 x + \cos^4 x - \sin 2x + k = 0$ 有解, 则 k 的取值范围是_____.

14. 在数集序列 $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$ 中第 100 个数集内所有数的和等于_____.

15. F_1, F_2 是双曲线的左、右焦点, A, B 两点在右支上, 且与 F_2 在同一直线上, 则 $|F_1A| + |F_1B|$ 的最小值是_____.

16. 在平面直角坐标系内, 从点 $P(5, 2)$ 发出的光线射向 x 轴, 经 x 轴反射后射到直线 $y = x$ 上, 被反射后恰好经过点 $Q(10, 9)$, 光线由 P 到 Q 走过的路程的长等于_____.

17. 已知 $A(4, 0), B(2, 2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 内的点, M 是椭圆上的动点, 则 $|MA| + |MB|$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

18. $M = \{(x, y) | x = \sin \theta - \cos \theta, y = \sin \theta \cos \theta, \theta \in R\}, N = \{(x, y) | x + y = 0, x, y \in R\}$ 则 $M \cap N =$

19. $F_1(-1, 1), F_2(-1, -3)$ 是椭圆的两个焦点, 直线 $x + y = 1$ 与椭圆有且仅有一个交点, 则椭圆的中心到准线的距离是_____.

20. 已知 $x \geq 1, y \geq 1$, 且 $\log_a^2 x + \log_a^2 y = \log_a(ax^2) + \log_a(ay^2)$ (其中 $a > 0, a \neq 1$), 则 $\log_a(xy)$ 的取值范围是_____.

三、解答题

21. 设 $f(x) = a \sin x + b \cos x + c$ 的图像经过点 $A(0, 5), B(\frac{\pi}{2}, 5)$, 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $|f(x)| \leq 10$, 求 c 的取值范围.

22. 用数学归纳法证明: 对任意的 $n \in N, n \geq 2$, 都存在 n 个互不相等的自然数组成的集合 M , 使得对任意的 $a \in M$ 和 $b \in M$, $|a - b|$ 都可以整除 $a + b$.