

第五届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 一个直角三角形的三条边的长度都是整数,且组成一个等差数列,则其中的一条边的长度可能是

A. 13 B. 41 C. 81 D. 91

2. 以正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四个顶点 A, B_1, C, D_1 为顶点构成四面体,此四面体的表面积与正方体的表面积之比为

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 半球形的碗内盛满了水,若将碗口平面倾斜 30 度,则碗内溢出的水的体积是碗的容积的

A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{11}{12}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{11}{16}$

4. 方程 $2^{\sin x} = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的根的个数是

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

5. 动点 P 到 $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的距离等于到 $l: x + y - \sqrt{2} = 0$ 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍,则 P 的轨迹是

A. 椭圆 B. 双曲线的一支 C. 等轴双曲线 D. 实虚轴不等的双曲线

6. 在 $f_1(x) = \log_2(\sqrt{x^2 - 1} + x) + \log_2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$, $f_2(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$, $f_3(x) = 2^{\tan x}$ 中,

奇函数的个数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 若 $\log_{\frac{1}{2}} a + 2 = a$, $\log_2(b + 2) = \sqrt{-b}$, $2^c + c - 2 = 0$ 都成立,则

A. $b < c < a$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

8. 函数 $f_1(x) = |\sin \frac{x}{2}| |\cos \frac{x}{2}|$, $f_2(x) = \sin \frac{2x}{3} + \cos \frac{2x}{3}$, $f_3(x) = \arccos(\sin x)$ 的最小正周期依次是 T_1, T_2, T_3 , 则

期依次是 T_1, T_2, T_3 , 则

A. $T_1 < T_2 < T_3$ B. $T_3 < T_2 < T_1$ C. $T_1 < T_3 < T_2$ D. $T_3 < T_1 < T_2$

9. 在不等边三角形 ABC 中, $\sin A : \sin B : \sin C = x : y : z$, 则

$(x - y) \cot \frac{C}{2} + (y - z) \cot \frac{A}{2} + (z - x) \cot \frac{B}{2} =$

A. 1 B. 0 C. -1 D. -3

10. 圆台的上、下底半径分别为 5 和 10, 母线 AB 长 20 (其中 B 点在下底圆周上), 从母线 AB 的中点拉一条绳子, 围绕圆台的侧面转到 B 点, 当所用最短的时候, 绳子上的点和圆

台的上底圆周上的点之间的最短距离是

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

二、填空题

11. 自点 $M(3, 2)$ 引圆 $x^2 + y^2 = 3$ 的两条切线, 以两个切点为端点的劣弧的长度等于_____.

12. 方程 $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$ 的解集是_____.

13. 已知 $a > b > c > 1$, 且 a, b, c 依次成等比数列, 则 $x = \log_a b, y = \log_b c, z = \log_c a$ 这三个数的大小关系 (用小于号连接) 是_____.

14. 函数 $f(x) = 9 \sin x + 16 \csc x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值是_____.

15. 前 n 个正整数中, 所有不连续的相异两数之积的和是_____.

16. 设 a, c 是正数常数, 对于每个实数 t , $P(x_t, y_t)$ 是抛物线 $y = ax^2 + tx + c$ 的顶点坐标, 则动点 P 的轨迹方程是_____.

17. 在三棱锥中 $S-ABC$, 侧棱 SA, SB, SC 两两垂直, $SA = SB = 4, SC = 6$, 在三棱锥的内部有一个与三棱锥的四个面都相切的球, 则此球的半径为_____.

18. 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = a (0 < a < 1), a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}{2}}$, 则它的一个通项公式是 $a_n =$ _____.

19. 设地球半径为 R , A 和 B 两个城市都位于北纬 30 度, 且分别位于东经 120 度与西经 120 度, 则沿北纬 30 度线从 A 到 B 的最短距离减去沿地球表面从 A 到 B 的最短距离的差等于_____.

20. 已知无盖的圆柱形桶的容积是 V , 用来做桶底和侧面的材料每平方米的价格比为 3:2, 则当圆桶造价最低时, 桶底半径 $R =$ _____.

三、解答题

21. 已知函数 $y = \frac{a + 3 \sin x + \cos x}{1 + \sin x + 2 \cos x}$ 的值域是 $(-\infty, +\infty) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$, 试求实数 a 的值.

22. (1) 平面 $\alpha \perp$ 圆柱 M_1M_2 的轴 l , 与侧面的交线是圆 T_1 ; 平面 β 与 α 相交成锐角 γ , 交线为 AB ; β 与圆柱的侧面的交线是椭圆 T_2 ; 以圆柱的过 B 的一条母线 l' 为 y 轴, 以 α 内过的圆 T_1 的切线为 x 轴建立直角坐标系 $x-B-y$; 将圆柱的侧面沿 l' 切开, 展开到平面 $x-B-y$ 内. 证明: 在平面 $x-B-y$ 内, 椭圆的展开图形是正弦曲线.

(2) 将平面 $x-O-y$ 卷成圆筒, 使 y 轴成为它的一条母线且点 $O(0, 0)$ 与点 $P(\pi, 0)$ 两点重合, 在圆筒的侧面上, 正弦曲线 $y = \sqrt{2} \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 变为椭圆, 求此椭圆的离心率.