第六届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1．将棱长为1的正四面体和棱长为1的正八面体的一个面重合，得到的新多面体的面数是

A．7　B．8　C．9　D．10

2．设常数$a\geq 0$，则“$|x|+|y|\geq a$”是“$x^2+y^2\geq a^2$”的

A．必要不充分条件　B．充分不必要条件　C．充分且必要条件　D．不充分也不必要条件

3．方程$3(\sec^2 x+\cot^2 x)=13$在区间$(-\pi,\pi)$上的解的个数是

A．2　B．4　C．8　D．16

4．适合方程$\arcsin x=\arccos y$的点$P(x,y)$组成的图形是

A．一个圆　B．四分之三个圆　C．半个圆　D．四分之一个圆

5．等差数列$\{a_n\}$的前n项的和记为S_n，已知$a_1>0,S_7=S_{13}$，则当S_n的值最大时，$n=$

A．8　B．9　C．10　D．11

6．设$1<a<b<a^2$，则在四个数$2,\log_a b,\log_b a,\log_{ab} a^2$中，最大的和最小的分别是

A．$2,\log_b a$　B．$2,\log_{ab} a^2$　C．$\log_a b,\log_b a$　D．$\log_a b,\log_{ab} a^2$

7．适合方程$\arctan x+\operatorname{arccot} y=\pi$的点$P(x,y)$的集合是某二次曲线$C$的一部分，则$C$的焦点坐标是

A．$(2,2)$和$(-2,-2)$　B．$(2,-2)$和$(-2,2)$

C．$(\sqrt{2},\sqrt{2})$和$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$　D．$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$和$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

8．如果关于x的方程$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a$有且仅有一个实根，则实数$a$的取值范围是

A．$[\frac{1}{4},+\infty)$　B．$[\frac{1}{2},+\infty)$　C．$[1,+\infty)$　D．$[2,+\infty)$

9．不等式$\sqrt{1+\log_2 x}>1-\log_2 x$的解是

A．$x\geq 2$　B．$x>1$　C．$1<x<8$　D．$x>2$

10．与105有大于1的公约数的两位自然数的和是

A．2078　B．2295　C．2708　D．3338

二、填空题

11．曲线$x^2+y^2+2x-2y=0$和$xy+2=0$的交点弦的中垂线的方程是_____．

12．如果正六棱锥侧面的顶角等于侧棱和锥底平面所成的角，那么这个角的值等于_____．

13．三角形 AOB 的顶点 O 在坐标原点，A,B 两点在抛物线 $y^2=8x$ 上，且该三角形的垂心恰与抛物线焦点重合，则此三角形的外接圆的方程是_____．

14．三角形的三边之长 a,b,c 满足等式 $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}=b$，则长为 b 的边所对的角 B 的大小是_____．

15．由抛物线 $x^2=2y$，x 轴和直线 $x=21$ 所围成的平面区域（边界除外）中，横、纵坐标都是整数的点的个数是_____．

16．周长为 10 的直角三角形的面积的最大值是_____．

17．实数 x,y 满足 $x^2-3xy+y^2=2$，则 x^2+y^2 的值域是_____．

18．当函数 $y=2(2-\sin x\cos 2x)+\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)$ 的值最小时，x 的值是_____．

19．位于北纬 60 度、东经 17 度的海面上 A 处的船要驶向位于同纬度、东经 137 度的 B 岛，设地球半径为 R，则该船航行的最短距离是_____．

20．已知 A,B 是平面上的两个定点，以 A 为圆心，定长 l 为半径做圆，M 是该圆上的一个动点，线段 MB 的中垂线 m 交 MA（或它的延长线）于 P 点，那么 P 点的集合构成的图形是_____．

三、解答题

21．设点 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左焦点，弦 AB 过该椭圆的右焦点 F_2，求三角形 F_1AB 的面积的最大值．

22．设 $P=\lambda(a^4+b^4+c^4)+\mu(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$．已知当 $a=b=c>0$ 或 $a=b>0,c=0$ 时，都有 $P\geq 0$．证明：当 a,b,c 是任意三角形的三边的长时，$P\geq 0$．