

第七届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

一、选择题

1. 若函数 $y = |\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$, 那么正数 $\omega =$
A. 8 B. 4 C. 2 D. 1
2. 不等式 $\sqrt{x^2 - 3} > x - 1$ 的解是
A. $x > 2$ B. $x \leq -\sqrt{3}$ C. $x > 2$ 或 $x \leq -\sqrt{3}$ D. $x > 1$ 或 $x \leq -\sqrt{3}$
3. 如果 $\sin \alpha + \cos \alpha > \tan \alpha + \cot \alpha$, 那么角 α 的终边所在的象限是
A. 1 或 2 B. 2 或 3 C. 2 或 4 D. 1 或 4
4. 如果直线 $y = kx - 1$ 和椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{a} = 1$ 仅有一个交点, 则 k 和 a 的取值范围分别是
A. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $(0, 1]$ B. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $(0, 1)$ C. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 和 $[0, 1]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 和 $(0, 1)$
5. 已知 θ 是第三象限的角, 并且 $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \frac{5}{9}$, 那么 $\sin 2\theta =$
A. $\frac{2}{9}\sqrt{14}$ B. $-\frac{2}{9}\sqrt{14}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
6. 直线 l 过点 $(0, 2)$, 且与双曲线 $x^2 - y^2 = 6$ 的右支有两个不同的交点, 设 $\alpha = \arctan \frac{\sqrt{15}}{3}$, 则 l 的倾斜角的取值范围是
A. $(0, \alpha) \cup (\pi - \alpha, \pi)$ B. $(0, \alpha)$ C. $(\pi - \alpha, \pi)$ D. $(\pi - \alpha, \frac{3\pi}{4})$
7. 当 $a, b < 0$ 时, 函数 $y = \frac{x}{(x-a)(x-b)}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最大值是
A. $-(\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|})^2$ B. $(\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|})^2$ C. $-\frac{1}{(\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|})^2}$ D. $\frac{1}{(\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|})^2}$
8. 由平面 M 外一点向 M 引出的两条射线所夹的角是 $\alpha (0 < \alpha < \pi)$, 两条射线在 M 内的射影所夹的角是 $\beta (0 < \beta < \pi)$, 那么
A. $\alpha < \beta$ B. $\alpha = \beta$ C. $\alpha > \beta$ D. 不能确定
9. 若 $\frac{\lg 2ax}{\lg(a+x)} < 1$ 的解包含 $(1, 2]$, 则 a 的取值范围是

A. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ B. $(0, \frac{2}{3})$ C. $(0, \frac{1}{3})$ D. $(0, 1)$

10. 给出下列四个不等式

(1) 当 $x \in R$ 时, $\sin x + \cos x > -\frac{3}{2}$;

(2) 对于任意正实数 x, y 和任意实数 α , 有 $x^{\sin^2 \alpha} y^{\cos^2 \alpha} < x + y$;

(3) x 是非零实数, 则 $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$

(4) 当 α, β 都是锐角时, $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$

其中不成立的个数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和 $S_n = A$, 则前 $3n$ 项的和 $S_{3n} =$ _____.

12. 若 $\arccos \frac{12}{13} - \arccos(-\frac{12}{13}) = \arcsin x$, 则 $x =$ _____.

13. 若不等式 $(\frac{1}{2})^{x^2-a} > 4^{-x}$ 的解集是 $(-2, 4)$, 则实数 $a =$ _____.

14. 已知 $i^2 = -1$, 集合 $\{s | s = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n, n \in N\}$ 包含的全部元素是_____.

15. 已知 $\tan \theta \in (1, 3)$, 且 $\tan(\pi \cot \theta) = \cot(\pi \tan \theta)$, 则 $\sin 2\theta =$ _____.

16. 不等式 $\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$ 的解是_____.

17. 函数 $y = \arccos(x - x^2)$ 的值域是_____.

18. 已知函数 $y = \lg(mx^2 - 4x + m - 3)$ 的值域是 R , 则 m 的取值范围是_____.

19. 在三棱锥中 $P-ABC$, $\angle APC = \angle CPB = \angle BPA = \frac{\pi}{2}$ 并且 $PA = PB = 3, PC = 4$, 又 M 是底面 ABC 内一点, 则 M 到该三棱锥三个侧面的距离的平方和的最小值是_____.

20. 非负实数 x, y 满足 $x + 2y \leq 6, x^2 - 6x + 5 \leq y$, 则 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y$ 的最大值是_____ , 最小值是_____.

三、解答题

21. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷递缩等比数列, 并且 $a_n = \frac{(x-2)\sqrt{4-\frac{1}{3}x^2}}{(x-1)^n}, n \in N^+$. 以 $f(x)$ 表示

这个数列的和. (1) 求 $f(x)$ 的解析式; (2) 作函数 $f(x)$ 的大致图像.

22. 已知在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有 $\sin x < x < \tan x$. 证明:

(1) 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减

(2) 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$

(3) 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$