

## 第八届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试

### 一、选择题

1. 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2$ , 若  $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$ , 则  $b_n$  的前 998 项的和是

A.  $\frac{\sqrt{1996}-1}{2}$    B.  $\frac{\sqrt{1997}-1}{2}$    C.  $\frac{\sqrt{1998}-1}{2}$    D.  $\frac{\sqrt{1999}-1}{2}$

2. 不等式  $2\lg(\arcsin x) \leq \lg(\arcsin x - 2)$  的解集是

A.  $(0, 1]$    B.  $[-\sin 1, \sin 2]$    C.  $(0, \sin 2]$    D. 空集

3. 三角形  $ABC$  的三条边的长  $a, b, c$  依次成等比数列, 则  $\sin B + \cos B$  的取值范围是

A.  $(1, \sqrt{2}]$    B.  $[\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}]$    C.  $(0, \sqrt{2}]$    D.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

4. 函数  $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x + \sqrt{2}}$  的最小值是

A.  $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$    B.  $2 - \sqrt{2}$    C.  $\sqrt{2}$    D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 正方体中  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ,  $M, N$  分别是棱  $C_1D_1, AB$  的中点;  $A_1, M, C, N$  四点在同一个平面内; 则  $CD$  和平面  $A_1MCN$  所成的角的正弦值是

A.  $\frac{1}{2}$    B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$    C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$    D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

6. 直线  $y = x + 1$  与椭圆  $mx^2 + ny^2 = 1 (m, n > 0)$  相交于  $A, B$  两点, 弦  $AB$  的中点的横坐标是  $-\frac{1}{3}$ , 则双曲线  $\frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} = 1$  的两条渐进线所夹的锐角等于

A.  $2 \arctan 2$    B.  $2 \arctan \frac{1}{2}$    C.  $\pi - 2 \arctan 2$    D.  $\pi - 2 \arctan \frac{1}{2}$

7. 下列椭圆中和双曲线  $\frac{x^2}{-p} + \frac{y^2}{q} = 1$  共焦点的是

A.  $\frac{x^2}{2q+p} + \frac{y^2}{q} = 1$    B.  $\frac{x^2}{2q+p} + \frac{y^2}{q} = -1$    C.  $\frac{x^2}{2p+q} + \frac{y^2}{p} = 1$    D.  $\frac{x^2}{2p+q} + \frac{y^2}{p} = -1$

8. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$  , 且  $S_1 = 1$  , 点  $(n, S_n)$  在曲线  $C$  上 ,  $C$  和直线  $x - y + 1 = 0$  交于  $A$ 、 $B$  两点 ,  $|AB| = \sqrt{6}$  , 那么这个数列的通项公式是

A.  $a_n = 2n - 1$    B.  $a_n = 3n - 2$    C.  $a_n = 4n - 3$    D.  $a_n = 5n - 4$

9. 方程  $\cos x = x + \sin x$  的实根个数是

A. 1   B. 2   C. 3   D. 4

10. 数列  $\{\frac{1}{\sqrt{n}}, n \in N^+\}$  的前 1000000 项和的整数部分是

A. 1997   B. 1998   C. 1999   D. 2000

## 二、填空题

11. 等差数列  $\{a_n\}$  中 ,  $a_5 = 9, a_{10} = 19$  , 则  $2^{n+1} - 3$  是这个数列中的第\_\_\_\_\_项 .

12. 如果函数  $f(x) = ax^2 + bx + c, x \in [2a - 3, a^2]$  是偶函数 , 则  $a =$ \_\_\_\_\_ ;  $b =$ \_\_\_\_\_ .

13. 一半球的体积是  $18\pi$  , 则此半球的内接正方体的表面积是\_\_\_\_\_ .

14. 某工厂产值连续三年增长 , 已知年平均增长率为  $p$  , 若这三年的增长率分别为  $x_1, x_2, x_3$  , 则  $x_1 + x_2 + x_3$  的最小值是\_\_\_\_\_ .

15. 已知函数  $f(x) = \log_{a^2}(x^2 - ax - a)$  , 如果该函数的定义域是  $R$  , 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_ ; 如果该函数的值域是  $R$  , 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_ .

16. 不等式  $\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$  的解集是\_\_\_\_\_ .

17. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的顶点在以该抛物线截  $x$  轴所得线段为直径的圆的内部 , 则  $a, b, c$  之间的关系是\_\_\_\_\_ .

18. 函数  $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$  的值域是\_\_\_\_\_ .

19. 将平面直角坐标系以  $x$  轴为棱折成直二面角 , 则该坐标系中的直线  $x - y = 1$  折成的角的大小等于\_\_\_\_\_ .

20. 若  $f(x)$  是定义域为  $R$  的函数 , 并且  $f(x+2) \times [1 - f(x)] = 1 + f(x), f(1) = 2 + \sqrt{3}$  , 则  $f(1997) =$ \_\_\_\_\_ .

### 三、解答题

21. 某城市 1996 年底人口为 92 万人，人均住房面积 5 平方米。

(1) 若该城市自 1997 年起人口年均增长率为 2%，城市规划要求到 2004 年末人均住房面积不少于 8 平方米，那么，该城市自 1997 年起，每年新建住房面积至少是多少万平方米？(答案要求精确到万平方米，以下数据供选用  $1.02^3 \doteq 1.06, 1.02^6 \doteq 1.13, 1.02^8 \doteq 1.17$ )

(2) 若该城市自 1997 年起每年新建住房 40 万平方米，为了使得到 2004 年末时，人均住房面积不少于 8 平方米，那么人口年均增长率不得高于多少？(答案要求精确到 0.001，当  $x$  很小时，可用近似公式  $(1+x)^n \approx 1+nx$ )

22. 在三角形  $ABC$  中，三条边的长分别为  $a = \sqrt{7}, b = 2, c = 3$ ，作此三角形的内切圆  $O_1$ ；再作与边  $AB$ 、 $AC$  及圆  $O_1$  都相切的圆  $O_2$ ；又作与  $AB$ 、 $AC$  和圆  $O_2$  都相切的圆  $O_3$ ；如此继续下去做这样相切的圆，求所有这种圆的面积之和。